NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

S. REALIS

Note sur le nombre e

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 158-171

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__158_0>

NOTE SUR LE NOMBRE e

(voir p. 16);

PAR M. S. REALIS.

III.

1. Dans ce paragraphe, je me propose d'indiquer succinctement et sur des exemples usuels quelques-unes des applications très-variées et très-importantes dont les principes exposés précédemment sont susceptibles. Une courte digression, au sujet d'une question jadis proposée dans les *Nouvelles Annales* d'après le *Senate House* de Cambridge, complétera ces considérations élémentaires sur les relations d'inégalité qui se rapportent à l'exponentielle népérienne.

Reprenons la double inégalité

$$(1) \qquad 1 + x < e^x < (1 - x)^{-1}$$

démontrée dans le § I, et où il n'y a lieu de considérer que les valeurs de x pour lesquelles le premier et le troisième membre restent positifs. Des conséquences importantes peuvent d'abord se déduire de cette formule, à l'aide d'un procédé fréquemment employé, et qui consiste à combiner membre à membre, par voie de multiplication, les résultats successifs qu'on obtient en donnant à la variable une suite de valeurs assujetties à une loi déterminée.

Faisons en premier lieu

$$x = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \ldots, \quad \frac{1}{n},$$

successivement, et multiplions les résultats comme il vient d'être dit. Nous trouverons, en réduisant,

$$\frac{n+1}{2} < e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}} < n,$$

puis, en prenant les logarithmes népériens, et ajoutant ensuite l'unité à chaque membre,

$$1 + \log\frac{n+1}{2} < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < 1 + \log n.$$

On obtient ainsi très-simplement deux limites entre lesquelles est comprise la somme des n premiers termes de la série harmonique.

Si l'on fait successivement dans la formule (1)

$$x = \frac{1}{m+1}, \quad \frac{1}{m+2}, \quad \frac{1}{m+3}, \ldots, \quad \frac{1}{m+n},$$

m étant un nombre positif, et n un entier positif, on trouve de la même manière

$$\log\frac{m+n+1}{m+1} < \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{m+n} < \log\frac{m+n}{m},$$

résultat plus général que le précédent, et qui nous montre que la série du second membre prolongée indéfiniment est divergente, puisque le premier membre croît jusqu'à l'infini avec n.

Posant

$$p = 1 + \frac{n}{m}, \quad \text{d'où} \quad m + n = pm,$$

il vient

$$\log\frac{pm+1}{m+1} < \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{pm} < \log p.$$

Cette double inégalité, où les trois membres se rapprochent indéfiniment l'un de l'autre à mesure que l'on prend m de plus en plus grand, p restant fixe, fournit une nouvelle démonstration d'une formule due à M. Catalan, et dont la question 458 est un cas particulier (voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1re série, t. XVII, p. 434; t. XVIII, p. 152 et p. 197).

2. Soit maintenant une suite illimitée de termes

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \ldots, \quad u_n, \ldots,$$

se succédant suivant une loi déterminée, mais compris tous entre -1 et $+1$.

Nous trouverons, au moyen de la formule (1), et en opérant comme précédemment sur les n premiers termes de la série,

$$(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n) < e^{u_1+u_2+\ldots+u_n}$$
$$< \frac{1}{(1-u_1)(1-u_2)\ldots(1-u_n)},$$

ce que nous écrivons sous la forme abrégée

$$U_n < e^{S_n} < \frac{1}{U_{-n}},$$

où les trois membres sont nécessairement positifs.

Ainsi :

1° Si la somme S_n tend vers une limite finie quand n croît indéfiniment, c'est-à-dire si la série proposée est convergente, aucun des produits U_n, U_{-n} ne tendra vers l'infini. Et si, de plus, tous les termes de la série sont positifs, on pourra affirmer avec certitude que U_n tend vers une limite positive fixe (et l'on sait qu'il en sera de même de U_{-n}; mais cela ne résulte pas de la formule ci-dessus).

2° Si la somme S_n croît au delà de toute limite pour n suffisamment grand, le produit U_{-n} tend vers zéro. En ce cas, si tous les termes de la série sont positifs, le produit U_n tend vers l'infini (puisque alors $U_n > S_n$).

3° Si l'un des produits U_n, U_{-n} augmente indéfiniment en même temps que n, la série considérée est divergente.

3. La formule (1) conduit par le même procédé à la détermination des limites supérieures et inférieures de la valeur des factorielles. On nomme factorielle, comme on sait, le produit d'une suite de nombres en progression par différence; mais nous ne considérerons ici que la progression des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5,.... Lorsque le nombre des termes à multiplier est très-considérable, le calcul direct d'une factorielle est à peu près impraticable; mais il suffit souvent de connaître des limites plus ou moins rapprochées entre lesquelles le produit en question se trouve compris. C'est à ce point de vue que les résultats qui vont suivre pourront être quelquefois utiles.

Désignant par p et $n > p$ deux entiers positifs de même parité, posons la formule

$$1 - \left(\frac{2a}{n+p}\right)^2 < e^{-\left(\frac{2a}{n+p}\right)^2};$$

faisons-y successivement

$$a = 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\ldots,\quad \frac{n-p-2}{2},\quad \frac{n-p}{2},$$

et multiplions les résultats membre à membre. Il s'ensuivra une égalité de la forme

$$A < e^{-B},$$

où

$$A = \frac{\left\{ \begin{array}{l} \left[p(p+1)(p+2)\ldots \frac{n+p-4}{2}\,\frac{n+p-2}{2} \right] \\ \times \left[\frac{n+p+2}{2}\,\frac{n+p+4}{2} \cdots (n-2)(n-1)n \right] \end{array} \right\}}{\left(\frac{n+p}{2}\right)^{n-p}},$$

$$B = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + \left(\frac{n-p}{2}\right)^2}{\left(\frac{n+p}{2}\right)^2}.$$

De cette inégalité, en la multipliant par $\left(\frac{n+p}{2}\right)^{n-p+1}$, et faisant la somme des carrés qui figurent au numérateur de B, on tire la formule

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{l} p(p+1)(p+2)\ldots \frac{n+p-2}{2}\,\frac{n+p}{2}\,\frac{n+p+2}{2} \cdots (n-2)(n-1)n \\ < \left(\frac{n+p}{2}\right)^{n-p+1} e^{-\frac{(n-p)(n-p+1)(n-p+2)}{6(n+p)^2}}, \end{array} \right.$$

qui nous fournit une limite supérieure du produit des $n-p+1$ nombres entiers consécutifs à partir de p.

Il vient, pour $p=1$,

$$1.2.3\ldots(n-1)n < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n e^{-\frac{(n-1)n}{6(n+1)}},$$

et l'on a ainsi une limite supérieure du produit des n premiers nombres entiers; mais on trouve une expression plus avantageuse en multipliant la formule (2) par le produit $1.2.3\ldots(p-2)(p-1)$ supposé connu. L'inégalité résultante, savoir

$$\begin{array}{l} 1.2.3\ldots(n-1)n \\ < 1.2.3\ldots(p-1)\left(\frac{n+p}{2}\right)^{n-p+1} e^{-\frac{(n-p)(n-p+1)(n-p+2)}{6(n+p)^2}}, \end{array}$$

fournit une limite qui sera d'autant moins éloignée de la valeur exacte du premier membre, pour une valeur donnée de n, que la différence $n - p$ sera plus petite. Cela tient à ce que, dans la formule (1), les expressions séparées par les signes d'inégalité sont d'autant moins différentes l'une de l'autre, que la valeur numérique de x est plus petite.

On obtient des résultats ne contenant plus le nombre incommensurable e (mais où la limite se trouvera plus éloignée), en modifiant la formule (2) à l'aide de la relation

$$e^{-B} < (1 + B)^{-1},$$

ou, plus simplement, à l'aide de la relation

$$e^{-B} < 1.$$

C'est ainsi qu'on trouve immédiatement

$$p(p+1)(p+2)\ldots(n-1)\,n < \left(\frac{n+p}{2}\right)^{n-p+1},$$

ce qui s'accorde avec un théorème donné par Cauchy, et que nous rapporterons ci-dessous (n° 6). Cette dernière formule, du reste, peut s'obtenir directement en opérant comme plus haut sur l'inégalité évidente

$$1 - \left(\frac{2a}{n+p}\right)^2 < 1,$$

sans passer par la considération de la base népérienne.

4. La formule (1) se prête avec moins d'avantage à la détermination de limites inférieures de la valeur des factorielles; mais nous bornant au cas du produit des n premiers nombres entiers, nous allons traiter la question à l'aide d'inégalités autres que (1), mais se rapportant également à la fonction exponentielle.

D'après l'énoncé de la question 292 (*voir* t. XIII, p. 192), n étant un nombre positif entier, on a

$$(3)\qquad e^n > \frac{(n+1)^n}{1.2.3\ldots n}.$$

On tire de là

$$1.2.3\ldots n > \left(\frac{n+1}{e}\right)^n,$$

ce qui nous fournit déjà une limite inférieure très-simple du produit des n premiers nombres entiers. Mais il est facile de parvenir à des limites beaucoup plus élevées.

Remarquons d'abord que la formule (3) devient évidente par la comparaison, terme à terme, du développement fini

$$(1+n)^n = 1 + \frac{n}{1}n + \frac{n(n-1)}{1.2}n^2 + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots(k+1)}{1.2.3\ldots(n-k)}n^{n-k} + \ldots + n^n,$$

ou

$$\frac{(1+n)^n}{1.2.3\ldots n} = \frac{1}{1.2.3\ldots n} + \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\frac{n}{1}$$
$$+ \frac{1}{1.2.3\ldots(n-2)}\frac{n^2}{1.2} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{1.2.3\ldots(k-1)k}\frac{n^{n-k}}{1.2.3\ldots(n-k)} + \ldots$$
$$+ \frac{n^n}{1.2.3\ldots n},$$

avec le développement

$$e^n = 1 + \frac{n}{1} + \frac{n^2}{1.2} + \ldots$$
$$+ \frac{n^{n-k}}{1.2.3\ldots(n-k)} + \ldots + \frac{n^n}{1.2.3\ldots n} + R,$$

où R est un nombre fini positif. Cette démonstration revient à celle qui a été donnée t. XIV, p. 132 (par MM. Paque et Devylder, professeurs); mais nous allons tirer parti du reste R pour étendre l'énoncé de la question 292, ce qui n'avait pas été fait dans la solution citée.

L'extension annoncée se présente d'elle-même, car la comparaison des développements qui précèdent établit directement et d'une manière générale la relation

$$e^n > \frac{(n+1)^n}{1.2.3\ldots n} + \mathrm{R}$$

pour toutes les valeurs entières et positives de n. On a par là le moyen d'élever rapidement la limite inférieure de e^n fournie par la formule (3), en y ajoutant des quantités moindres que R, mais d'autant plus considérables que n est plus grand.

Remplaçons le reste R par la série convergente qu'il représente, savoir :

$$\frac{n^n}{1.2.3\ldots n}\left[\frac{n}{n+1} + \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} + \frac{n^3}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots\right],$$

où l'on posera, pour abréger,

$$u_k = \frac{n^k}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}.$$

Ne prenons d'abord que les deux premiers termes de cette série; nous aurons, à cause de $u_1 + u_2 = \frac{2n}{n+2}$,

$$e^n > \frac{(n+1)^n + \frac{2n^{n+1}}{n+2}}{1.2.3\ldots n},$$

et aussi, si n n'est pas inférieur à 2,

$$e^n > \frac{(n+1)^n + n^n}{1.2.3\ldots n},$$

formule où la différence entre les deux membres est déjà bien moins considérable que dans la relation (3).

Prenons maintenant trois termes de R, il viendra

$$e^n > \frac{(n+1)^n + (u_1 + u_2 + u_3)\, n^n}{1.2.3\ldots n},$$

et, si $n > 6$,

$$e^n > \frac{(n+1)^n + 2n^n}{1.2.3\ldots n}.$$

La condition $n > 6$ s'obtient en résolvant en nombres entiers l'inégalité

$$u_1 + u_2 + u_3 > 2;$$

mais il est facile de s'assurer que la formule qu'on vient d'écrire subsiste à partir de $n = 3$.

Les quatre premiers termes de R donnent de la même manière

$$e^n > \frac{(n+1)^n + 3n^n}{1.2.3\ldots n},$$

et $n > 15$; mais il suffit que l'on ait $n > 4$.

On voit par là qu'en tenant compte des $k+1$ premiers termes de R, on peut poser, en général,

$$(4) \qquad e^n > \frac{(n+1)^n + kn^n}{1\;2\ldots n},$$

pourvu que n ne soit pas au-dessous d'une certaine valeur dépendant de k, et dont la limite supérieure est donnée par le plus petit nombre entier vérifiant l'inégalité

$$(5) \qquad u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{k+1} > k.$$

De la formule (4) on tire la suivante :

$$1.2.3\ldots n > \left(\frac{n+1}{e}\right)^n + k\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

servant au calcul approché (par défaut) du produit considéré. Et en combinant celle-ci avec l'inégalité

$$e^{-n} > \left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{\frac{n}{x}},$$

qui se déduit d'une relation énoncée au n° 3 du § I, et où l'on peut attribuer à x une valeur arbitraire, mais comprise entre zéro et 2, on obtiendrait au besoin des résultats débarrassés de la transcendante e.

5. Il serait intéressant de pouvoir assigner d'avance la plus grande valeur de k correspondant à une valeur donnée de n, et, réciproquement, la plus petite valeur de n à partir de laquelle la formule (4) se trouve vérifiée, k étant donné. Mais cette question, dont la solution complète fournirait immédiatement deux limites assez rapprochées, comprenant entre elles le produit que nous considérons, semble présenter de grandes difficultés, et il suffit ici de l'avoir signalée.

Mais s'il n'est pas possible de déterminer d'avance la relation qui lie de la manière la plus avantageuse les entiers n et k, il est facile néanmoins d'établir des limites de différence entre ces nombres, en dehors desquelles la formule (4) soit applicable.

Soit donnée une valeur de k assez grande pour qu'il faille renoncer à faire usage de l'inégalité (5) pour calculer une limite supérieure de n. Nous pourrons toujours considérer, au lieu de (5), l'inégalité

$$(k+1)\,n^{k+1} > k\,(n+k+1)^{k+1},$$

car si celle-ci est satisfaite, (5) le sera à plus forte raison. D'où il suit qu'en prenant

$$n > \frac{k+1}{\sqrt[k+1]{\frac{k+1}{k}} - 1},$$

on sera assuré d'avoir des nombres supérieurs à la valeur minimum de n qui vérifie la formule (4).

Il ne serait pas difficile d'abaisser plus ou moins cette limite supérieure de n, en partant des relations qui s'écartent moins que celle qu'on vient d'écrire de l'inégalité (5). On pourrait aussi, par des considérations analogues aux précédentes, poser une inégalité de la forme

$$1.2.3\ldots n > h\left(\frac{n+1}{e}\right)^n,$$

qui se prête mieux au calcul par logarithmes, ou de la forme

$$1.2.3\ldots n > \left(\frac{n+1}{e}\right)^n + k\left(\frac{n}{e}\right)^n + k'e\left(\frac{n}{e}\right)^{n-1} + k''e^2\left(\frac{n}{e}\right)^{n-2} + \ldots,$$

propre à donner une plus grande approximation. Mais la difficulté d'obtenir des valeurs convenables de h, k, k', k'', ..., lorsque n est un grand nombre, ne laisse guère espérer que l'on puisse arriver par cette voie à des résultats d'une application avantageuse.

Ajoutons qu'il y aurait peu d'utilité à s'engager dans des recherches minutieuses sur ce sujet, l'évaluation du produit en question pouvant toujours s'effectuer commodément à l'aide de la formule de Stirling. Cette formule remarquable, et sur laquelle d'illustres géomètres se sont exercés, sert à calculer la somme des logarithmes de

n nombres en progression par différence. On la trouve rapportée (pour ne citer ici qu'une source qui est à la disposition de tous) dans le *Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral* de Lacroix, et dans les Notes ajoutées par M. Serret à la sixième édition de cet ouvrage.

6. Je ne quitterai point ce sujet des limites des factorielles sans rappeler le théorème et le corollaire suivants, tirés des *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. IV, p. 206 :

THÉORÈME. — *Le produit des n termes de la progression arithmétique*

$$a, \quad a+b, \quad a+2b, \ldots, \quad a+(n-1)\,b,$$

supposés tous positifs, est compris entre les limites inférieure et supérieure

$$a^{\frac{n}{2}}[a+(n-1)\,b]^{\frac{n}{2}}, \quad \left(a+\frac{n-1}{2}\,b\right)^n.$$

Corollaire. — Si l'on suppose a et b réduits à l'unité, on conclura de ce théorème que le produit $1.2.3\ldots n$ est compris entre les limites inférieure et supérieure

$$n^{\frac{n}{2}}, \quad \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

7. Je crois utile, en terminant, de donner un exemple de l'application de la formule (1) à l'évaluation de certaines intégrales définies.

La relation

$$e^{-x^2} < \left(1+\frac{x^2}{m}\right)^{-m},$$

ou bien

$$e^{-x^2} < \frac{m^m}{(m+x^2)^m},$$

subsistant pour toutes les valeurs positives de m, et les deux expressions séparées par le signe d'inégalité étant constamment positives pour toutes les valeurs réelles de x, on est d'abord en droit d'en conclure

$$(6) \qquad \int_\alpha^\beta e^{-x^2}dx < m^m \int_\alpha^\beta \frac{dx}{(m+x^2)^m},$$

où nous supposerons $\alpha^2 < \beta^2 < m$ et β positif.

On sait d'ailleurs que, pour tout nombre entier m plus grand que l'unité, on a

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(m+x^2)^m} = \frac{1.3.5\ldots(2m-3)}{2.4.6\ldots(2m-2)} \cdot \frac{\pi}{2m^{m-\frac{1}{2}}}.$$

Dans notre cas, m doit être $> x^2$, et devient conséquemment infini avec x; par suite, eu égard à la formule de Wallis,

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{2.4.6\ldots(2m-2)}{1.3.5\ldots(2m-3)} \cdot \frac{\sqrt{2m}}{2m-1} \quad \text{pour} \quad m = \infty,$$

d'où

$$\frac{1.3.5\ldots(2m-3)}{2.4.6\ldots(2m-2)} = \frac{2\sqrt{m}}{(2m-1)\sqrt{\pi}} \quad \text{pour} \quad m = \infty,$$

nous poserons, pour $m = \infty$,

$$m^m \int_0^\infty \frac{dx}{(m+x^2)^m} = \frac{2\sqrt{m}}{(2m-1)\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi\sqrt{m}}{2} = \frac{2m}{2m-1} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

ou, par cela même que $m = \infty$,

$$m^m \int_0^\infty \frac{dx}{(m+x^2)^m} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Maintenant, rien ne s'oppose à ce que l'on considère, dans la formule (6), m comme infiniment grand à l'égard de β^2, tout en prenant $\alpha = 0$ et $\beta = \infty$ pour limites des intégrales; alors cette même formule se transforme en une relation d'égalité, et nous fournit de suite le résultat connu

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

J'ai choisi cet exemple à cause de sa simplicité et de l'importance du résultat; mais il est visible que le procédé employé peut conduire d'une manière analogue à la détermination d'autres intégrales définies non moins remarquables.