NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. CHEMIN

Relations entre les rayons de courbure de quelques systèmes de courbes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 120-127

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__120_1>

RELATIONS ENTRE LES RAYONS DE COURBURE DE QUELQUES SYSTÈMES DE COURBES;

PAR M. A. CHEMIN.

M. Nicolaïdès a proposé, dans ce Journal, de démontrer la formule $\frac{n}{\rho} + \frac{m}{\rho_1} = 2$, qui lie les rayons de courbure ρ et ρ' en deux points correspondants de deux courbes, dont l'une est la transformée de l'autre par rayons vecteurs réciproques.

On peut facilement établir une relation du même genre, mais beaucoup plus générale, d'où la précédente se déduit comme cas particulier. Soient m courbes quelconques (A), (B),... dans un plan; a, b, c,... les segments qu'elles déterminent sur une transversale passant constamment par un point fixe o de leur plan, ces segments étant comptés à partir du point o.

Soient aussi dans le même plan $(m - 1)$ autres courbes (A'), (B'),...; a', b', c',..., les segments analogues aux précédents et comptés de la même manière.

Déterminons pour ce second groupe une $m^{ième}$ courbe, par la condition que son rayon vecteur x, compté à partir du point o, satisfasse à la relation

$$(1) \qquad a.b.c\ldots = x.a'.b'\ldots.$$

Je vais déterminer la relation qui existe entre les rayons de courbure de toutes ces courbes aux points où elles sont rencontrées par la transversale considérée.

Prenons les logarithmes des deux membres de (1), différentions et divisons le tout par $d\omega$; nous aurons

$$(2)\quad \frac{da}{a\,d\omega} + \frac{db}{b\,d\omega} + \ldots = \frac{dx}{x\,d\omega} + \frac{da'}{a'\,d\omega} \text{ ou } \sum \frac{da}{a\,d\omega} = \sum \frac{dx}{x\,d\omega}.$$

Mais, d'après une formule connue de Géométrie analytique, on a, en coordonnées polaires,

$$\operatorname{tang} \nu = \frac{r\,d\omega}{dr},$$

r étant le rayon vecteur d'un point de la courbe qu'on considère, et ν l'angle formé par la tangente avec le prolongement du rayon vecteur, et compté dans le sens positif des angles polaires.

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \xi, \alpha', \beta', \ldots$, les angles analogues à ν pour les différentes courbes (A), (B); l'équation (2) peut s'écrire

$$(3)\qquad \sum \frac{1}{\operatorname{tang} \alpha} = \sum \frac{1}{\operatorname{tang} \xi}.$$

Cette relation permet de construire géométriquement la tangente en un point quelconque de la courbe (X).

Avant d'aller plus loin, je rappellerai deux formules connues, dont j'ai déjà fait plusieurs fois usage,

$$ds = n\,d\omega = \rho\,d\theta, \quad d\theta = d\omega + d\nu,$$

ds étant l'élément d'arc, n la normale polaire, ρ le rayon de courbure, $d\theta$ l'angle de contingence, ν ayant la signification indiquée plus haut.

La relation (3) différentiée donne, quand on change le signe de deux termes,

$$(4)\qquad \sum \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha} = \sum \frac{d\xi}{\sin^2 \xi}.$$

On a, en général,

$$\sin v = \frac{r}{n}.$$

Soient A, B,..., X′, A′, B′,... les normales polaires des différentes courbes; l'expression devient, quand on remplace les sinus par leurs valeurs,

$$(5) \qquad \sum \frac{A^2}{a^2} d\alpha = \sum \frac{X^2}{x^2} d\xi.$$

La formule $d\theta = d\omega + dv$ donne

$$(6) \qquad dv = d\theta - d\omega;$$

la formule $n d\omega = \rho d\theta$ conduit à

$$(7) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{n d\omega};$$

la relation (5) pourra donc s'écrire, en divisant tout par $d\omega$, remplaçant $d\alpha$, $d\beta$,,.. par leurs valeurs, et appelant $d\theta$, $d\theta_1$, $d\theta_2$,..., $d\theta'$, $d\theta'_1$,... les angles de contingence des différentes courbes,

$$(8) \qquad \sum \frac{A^3}{a^2}\left(\frac{d\theta - d\omega}{A d\omega}\right) = \sum \frac{X^3}{x^2}\left(\frac{d\theta' - d\omega}{X d\omega}\right),$$

ou bien, en tenant compte des relations (6) et (7), on obtient la relation suivante

$$(9) \qquad \sum \frac{A^3}{a^2}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{A}\right) = \sum \frac{X^3}{x^2}\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{X}\right),$$

que nous avions en vue d'établir.

Pour retrouver la formule de M. Nicolaïdès, supposons $m = 2$, ou le premier système se réduisant à A et B, et le second à X et A′. Supposons, de plus, que les deux premières courbes soient deux courbes de même rayon, ayant leur centre en o. Nous sommes alors dans le cas de la transformation par rayons vecteurs réciproques, et $A = B = \rho = \rho'$. Le premier membre de la relation (9) s'annule, et nous avons

$$\frac{X^3}{x^2}\left(\frac{1}{\rho_x} - \frac{1}{X}\right) + \frac{A'^3}{a'^2}\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{A'}\right) = 0,$$

ou bien encore

$$(1') \qquad \frac{X^2}{x^2}\left(\frac{X}{\rho_x} - 1\right) + \frac{A'^2}{a'^2}\left(\frac{A'}{\rho'} - 1\right);$$

or

$$\frac{x}{X} = \sin\xi, \quad \frac{a'}{A'} = \sin\alpha',$$

et, d'après les propriétés connues de la transformation par rayons vecteurs réciproques,

$$\alpha' + \xi = \varpi,$$

par suite,

$$\sin\alpha' = \sin\xi \quad \text{ou} \quad \frac{X}{x} = \frac{A'}{a'}.$$

En divisant donc l'équation (1') par $\frac{X}{x}$, nous obtenons

$$(2') \qquad \frac{X}{\rho_x} + \frac{A'}{\rho'} = 2.$$

C'est, sauf la différence de notation, la formule trouvée par M. Nicolaïdès.

Supposons que les m rayons vecteurs a, b, c soient ceux qui correspondent aux points d'intersection d'une courbe du $m^{ième}$ degré coupée par la transversale issue du point o. Déterminons une autre courbe, par la condition que son rayon vecteur a' remplisse la condition

$$(10) \qquad abc\ldots = a'^m.$$

La formule (9) trouvée plus haut nous donne

$$\sum \frac{A^3}{a^2}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{A}\right) = \frac{nA'^3}{a'^2}\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{A'}\right),$$

ou bien, puisque $\frac{A}{a} = \frac{\rho_1}{\sin\alpha}$,

$$\sum \left(\frac{a}{\rho \sin^3\alpha} - \frac{1}{\sin^2\alpha}\right) = \frac{na'}{\rho' \sin^3\alpha'} - \frac{n}{\sin^2\alpha'}.$$

Supposons maintenant que, la direction de la transversale restant fixe et d'ailleurs quelconque, le point o s'éloigne à l'infini sur la transversale. Le lieu du point X devient une droite, comme on pourra facilement le vérifier. Alors $\frac{1}{\rho'} = 0$, et, en divisant tout par a et supposant a, b,... infinis, nous arrivons à la relation

$$\sum \frac{1}{\rho \sin^3\alpha} = 0,$$

énoncée dans ce Recueil par M. Mannheim.

Cette formule, à laquelle nous parvenons ainsi, peut se déduire comme conséquence d'un autre théorème, et même se généraliser.

Considérons deux systèmes de m courbes dans un même plan

$$(A), (B), \ldots, \quad (A'), (B'), \ldots,$$

dont les rayons vecteurs, comptés sur une même transversale passant par un même point fixe o du plan et à partir de ce point, vérifient la relation

$$(\alpha) \qquad \sum a^m = \sum a'^m.$$

Nous allons chercher une relation entre les rayons de courbures de ces courbes aux points où elles sont rencontrées par la transversale. Différentions et divisons par m

$$(\beta)\qquad \sum a^{m-1}\,da = \sum a'^{m-1}\,da'.$$

Cette relation, divisée par $d\omega$, peut s'écrire

$$(\gamma)\ \sum a^m \frac{da}{a\,d\omega} = \sum a'^m \frac{da'}{a'\,d\omega} \quad \text{ou} \quad \sum \frac{a^m}{\operatorname{tang}\alpha} = \sum \frac{a'^m}{\operatorname{tang}\alpha'}.$$

Différentions une seconde fois

$$\sum \left(\frac{m\,a^{m-1}\,da}{\operatorname{tang}\alpha} - a^m \frac{d\alpha}{\sin^2\alpha} \right) = \sum \left(\frac{m\,a'^{m-1}\,da'}{\operatorname{tang}\alpha'} - a'^m \frac{da'}{\sin^2\alpha'} \right).$$

Cette équation, divisée par $d\omega$, peut s'écrire

$$\sum \left(\frac{m\,a^m}{\operatorname{tang}\alpha} \frac{da}{a\,d\omega} - a^m \frac{\frac{d\alpha}{d\omega}}{\sin^2\alpha} \right) = \sum \left(\frac{m\,a'^m}{\operatorname{tang}\alpha'} \frac{da'}{a'\,d\omega} - a'^m \frac{\frac{d\alpha'}{d\omega}}{\sin^2\alpha'} \right).$$

Mais, puisque $d\alpha = d\theta - d\omega$ et que $\frac{d\theta}{d\omega} = \frac{n}{\rho}$, nous aurons, en conservant les mêmes notations que plus haut,

$$\sum \left[m \frac{a^m}{\operatorname{tang}^2\alpha} - a^m \frac{\left(\frac{\mathrm{A}}{\rho} - 1\right)}{\sin^2\alpha} \right]$$
$$= \sum \left[m \frac{a'^m}{\operatorname{tang}^2\alpha'} - a'^m \frac{\left(\frac{\mathrm{A}'}{\rho} - 1\right)}{\sin^2\alpha'} \right]$$

ou bien

$$\sum \frac{a^m}{\sin^2\alpha} \left(m\cos^2\alpha + 1 - \frac{\mathrm{A}}{\rho} \right) = \sum \frac{a'^m}{\sin^2\alpha'} \left(m\cos^2\alpha' + 1 - \frac{\mathrm{A}'}{\rho} \right),$$

et, en remplaçant $\cos^2\alpha$ par $1 - \sin^2\alpha$, et, supprimant dans le premier membre $m \sum a^m$ et dans le second

$m \sum a'^m$, qui sont égaux, l'expression se réduit à

$$(11) \quad \sum \frac{a^m}{\sin^2\alpha}\left(m+1-\frac{A}{\rho}\right) = \sum \frac{a'^m}{\sin^2\alpha'}\left(m'+1-\frac{A'}{\rho'}\right).$$

C'est l'expression générale cherchée, où m peut recevoir une valeur quelconque.

En donnant à m des valeurs particulières, on obtient des formules qui présentent quelque intérêt.

Si on suppose $m = 1$, $a = \text{const.}$, on obtient la formule qui donne le rayon de courbure d'une courbe dérivant d'une courbe donnée, comme la conchoïde dérive d'une droite.

Le cas le plus intéressant résulte de la supposition $m = -1$. La formule (α) devient

$$(\alpha') \qquad \sum \frac{1}{a} = \sum \frac{1}{a'},$$

et la formule (11) se réduit, dans cette hypothèse, à

$$(12) \qquad \sum \frac{1}{a\sin^2\alpha}\,\frac{A}{\rho} = \sum \frac{1}{a'\sin^2\alpha'}\,\frac{A'}{\rho'};$$

mais, en général,

$$\frac{A}{a} = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

En substituant dans (12), nous avons la relation remarquable

$$(13) \qquad \sum \frac{1}{\rho\sin^3\alpha} = \sum \frac{1}{\rho'\sin^3\alpha'}.$$

Supposons que les m rayons vecteurs $a, b, \ldots,$ soient ceux qui correspondent aux points d'intersection d'une courbe algébrique d'ordre m par la transversale. De plus, supposons que les m rayons vecteurs $a', b', \ldots,$ soient égaux entre eux, la relation (α') devient, dans ce cas,

$$(\alpha'') \qquad \sum \frac{1}{a} = \frac{m}{a'},$$

relation qui donne le centre harmonique des m points d'intersection A, B,.... Or, on sait que, dans le cas d'une courbe algébrique, le lieu du point A′ est une droite; donc $\frac{1}{\rho'} = 0$, et la formule (13) devient, dans ce cas,

$$\sum \frac{1}{\rho \sin^3 \alpha} = 0.$$

Nous retrouvons la relation de M. Mannheim.

Quand la courbe, étant toujours rencontrée par la transversale en m points, n'est plus algébrique, le lieu du point A′ n'est plus une droite, mais une courbe qui joue le même rôle que la polaire rectiligne; le second membre de la relation ne s'annule plus, et la formule devient, dans ce cas,

$$\sum \frac{1}{\rho \sin^3 \alpha} = \frac{m}{\rho' \sin^3 \alpha'},$$

et, comme la longueur des rayons vecteurs n'entre pas dans cette formule, elle peut s'appliquer, quelle que soit la position du point o sur la transversale, à distance finie ou indéfinie.

Cette relation s'applique donc aussi bien à la polaire du point o qu'au diamètre relatif à la direction supposée fixe de la transversale.