Laisant

# Note sur le plan tangent en un point d'une surface

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 7 (1868), p. 116-120

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__116_1>

## NOTE SUR LE PLAN TANGENT EN UN POINT D'UNE SURFACE;

PAR M. LAISANT,
Capitaine du génie.

Dans les problèmes de géométrie à trois dimensions, une surface est souvent déterminée par deux équations

$$(1) \qquad F(x, y, z, \alpha) = 0,$$

$$(2) \qquad f(x, y, z, \alpha) = 0,$$

dans lesquelles $\alpha$ est un paramètre qu'il faudrait éliminer pour avoir l'équation de la surface.

Il peut être intéressant de déterminer le plan tangent en un point X, Y, Z de cette surface, sans effectuer l'élimination; c'est ce que nous allons essayer.

L'équation (1) peut être considérée comme l'équation de la surface, si nous supposons qu'on ait remplacé $\alpha$ par sa valeur tirée de l'équation (2). Ceci admis, posons $F(x, y, z, \alpha) = \varphi(x, y, z)$. L'équation du plan tangent en X, Y, Z est

$$(x - X)\varphi'_x(X, Y, Z) + (y - Y)\varphi'_y(X, Y, Z) \\ + (z - Z)\varphi'_z(X, Y, Z) = 0;$$

Or

$$\varphi'_x(X, Y, Z) = F'_x(X, Y, Z, \alpha) + F'_\alpha(X, Y, Z, \alpha)\,\alpha'_x.$$

De (2) nous tirons, en prenant la dérivée par rapport à $x$,

$$f'_x(X, Y, Z, \alpha) + f'_\alpha(X, Y, Z, \alpha)\,\alpha'_x = 0,$$

d'où

$$\alpha'_x = -\frac{f'_x(X, Y, Z, \alpha)}{f'_\alpha(X, Y, Z, \alpha)}.$$

Donc

$$\varphi'_x(X, Y, Z = F'_x(X, Y, Z, \alpha) - \frac{F'_\alpha(X, Y, Z, \alpha) f'_x(X, Y, Z, \alpha)}{f'_\alpha(X, Y, Z, \alpha)}$$

ou, plus simplement,

$$\varphi'_x = F'_x - \frac{F'_\alpha f'_x}{f'_\alpha}.$$

Nous aurons de même

$$\varphi'_y = F'_y - \frac{F'_\alpha f'_y}{f'_\alpha} \quad \text{et} \quad \varphi'_z = F'_z - \frac{F'_\alpha f'_z}{f'_\alpha},$$

et l'équation du plan tangent deviendra, en multipliant par $f'_\alpha$,

$$(x-X)(F'_x f'_\alpha - F'_\alpha f'_x) + (y-Y)(F'_y f'_\alpha - F'_\alpha f'_y) \\ + (z-Z)(F'_z f'_\alpha - F'_\alpha f'_z) = 0.$$

Il est bon de rappeler que les coefficients de $x-X$, $y-Y$, $z-Z$ sont proportionnels aux cosinus des angles que forme le plan tangent avec les plans des $yz$, des $zx$ et des $xy$.

Comme application de ce qui précède, nous allons traiter la question 700, dont l'énoncé est le suivant :

*La surface, lieu des sections circulaires diamétrales des ellipsoïdes appartenant à un système homofocal, coupe les ellipsoïdes orthogonalement.* (Strebor.)

Après les excellentes solutions de M. Picart et de M. Durrande, publiées dans ce Recueil (2e série, t. III, p. 532, et t. IV, p. 125), nous n'aborderions pas cette question, si nous n'avions simplement pour objet de montrer en quoi peut servir le procédé que nous avons indiqué.

Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

l'un des ellipsoïdes. On sait, en supposant $a > b > c$, que la section circulaire diamétrale est déterminée par cette équation et la suivante :

$$x^2 + y^2 + z^2 - b^2 = 0.$$

On a, en outre,

$$a^2 - b^2 = \text{const.} \quad \text{et} \quad b^2 - c^2 = \text{const.};$$

d'où

$$a'_b = \frac{b}{a} \quad \text{et} \quad c'_b = \frac{b}{c}.$$

On peut considérer $b$ comme le seul paramètre variable, et la recherche du plan tangent, au lieu des sections circulaires, rentre dans le cas général examiné plus haut. Les cosinus des angles $\lambda$, $\mu$, $\nu$ que forme ce plan avec les plans coordonnés sont proportionnels, d'après la formule trouvée, aux quantités

$$-\frac{bx}{a^2}+x\left(\frac{bx^2}{a^4}+\frac{by^2}{b^4}+\frac{bz^2}{c^4}\right),$$

$$-\frac{by}{b^2}+y\left(\frac{bx^2}{a^4}+\frac{by^2}{b^4}+\frac{bz^2}{c^4}\right),$$

$$-\frac{bz}{c^2}+z\left(\frac{bx^2}{a^4}+\frac{by^2}{b^4}+\frac{bz^2}{c^4}\right),$$

c'est-à-dire à

$$x\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)-\frac{x}{a^2},$$

$$y\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)-\frac{y}{b^2},$$

$$z\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)-\frac{z}{c^2}.$$

D'un autre côté, les cosinus des angles $\lambda'$, $\mu'$, $\nu'$, pour le plan tangent à l'ellipsoïde, sont proportionnels à

$$\frac{x}{a^2},\quad \frac{y}{b^2},\quad \frac{z}{c^2}.$$

Donc $\cos\lambda\cos\lambda'+\cos\mu\cos\mu'+\cos\nu\cos\nu'$, ou le cosinus de l'angle des deux plans, est proportionnel à

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)-\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^2}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)$$
$$-\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^2}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)-\frac{z^2}{c^4}$$

ou

$$\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right),$$

quantité identiquement nulle, puisque le second facteur est nul pour tout point de l'ellipsoïde. Il en résulte donc que les deux plans tangents se coupent à angle droit.