NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DE JONQUIÈRES

Réponse à une observation présentée dans le Giornale di Matematiche

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 111-116

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__111_0>

RÉPONSE A UNE OBSERVATION

Présentée dans le *Giornale di Matematiche*;

PAR M. DE JONQUIÈRES.

Le tome V du *Giornale di Matematiche* contient (p. 377) un article qui a pour but de démontrer l'inexactitude d'un théorème énoncé par moi dans une occasion précédente, et qui est ainsi conçu :

*Une série de courbes de degré m et d'*indice μ *peut toujours être représentée par une équation algébrique entière et rationnelle du degré m par rapport aux coordonnées x, y, et dans les coefficients de laquelle une indéterminée* λ *entre au degré* μ.

C'est dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (livraison du mois d'avril 1861) que j'avais, pour la première fois, énoncé cette proposition sous forme de *lemme*.

L'auteur montre, par un exemple particulier, qu'elle conduit à des résultats inexacts, et sa critique est fort juste, je m'empresse de le dire.

D'autres géomètres avaient déjà fait la remarque qu'il eût sans doute fallu dire *du degré m ou d'un multiple de m*, et le *Giornale* lui-même a publié précédemment un article intéressant, dans lequel M. Battaglini traite cette question d'une manière générale.

De mon côté, ayant eu occasion de revenir sur ce sujet dans une Note adressée à l'Académie des Sciences (novembre 1866), je déclarai que le lemme dont il s'agit est inexact, et peu de temps après, dans un Mémoire que je publiai sous le titre de *Recherches sur les Séries, etc.* (*), je montrai qu'on pouvait s'en passer pour l'usage auquel je l'avais fait servir en 1861, me bornant à ajouter : « Une équation algébrique du degré m en x et y, entière et rationnelle, dans les coefficients de laquelle une indéterminée λ entre au degré μ, représente évidemment, à elle seule, une série de degré m et d'indice μ. *Il peut arriver* que toutes les conditions données soient effectivement réductibles à cette forme simple. C'est, en particulier, ce qui a toujours lieu quand les courbes ou les surfaces données ont les mêmes points d'intersection et forment un faisceau. L'indice μ est alors égal à l'unité, et l'équation de la série prend alors la forme $S + \lambda S' = 0$, due à M. Lamé; $S = 0$ et $S' = 0$ étant les équations de deux quelconques des courbes ou surfaces de la série. »

Ainsi l'auteur de l'article du *Giornale* trouvera tous les esprits préparés de longue date à admettre sa réfutation. Quant à la réflexion par laquelle il termine, et qui est ainsi conçue : « Les observations qui précèdent ne m'ont pas paru indignes d'être remarquées, attendu qu'elles portent sur un théorème important qui se présente au début de la théorie des séries de courbes d'indice quelconque, » je le prierai de remarquer qu'elle n'a pas les conséquences qu'il paraît redouter.

En effet, toute la théorie des séries peut, comme je l'ai fait voir dans le Mémoire cité plus haut (*Recherches, etc.*), être établie sans tirer aucun secours du lemme incriminé, de telle sorte que ce lemme, tout inexact qu'il était, n'avait pas entaché les propositions fondamentales que j'en avais d'abord déduites. Qu'il me soit permis de revenir en peu de mots sur ce sujet.

Soit $F(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe générale

(*) Publié chez M. Gauthier-Villars. In-4; 1866.

du degré m. Si l'on y joint les $\frac{m(m+3)}{2} - 1$ équations entre les coefficients, dont chacune exprime une des conditions proposées, ce système de $\frac{m(m+3)}{2}$ équations définit complétement la *série* des courbes qui satisfont à ces conditions.

Supposons qu'on fasse $x = \alpha$, $y = \beta$ dans l'équation (F), α et β étant des constantes, et qu'on forme l'équation finale (dégagée effectivement ou théoriquement des solutions étrangères que la marche du calcul de l'élimination a pu introduire), qui résulte de l'élimination de tous les coefficients, moins un, entre les $\frac{m(m+3)}{2}$ équations; le degré μ de cette équation finale indique évidemment le nombre des courbes de la série qui passent par le point arbitraire $x = \alpha$, $y = \beta$; μ est donc ce que j'ai appelé (en 1861) l'*indice* de la série proposée, et cet indice est, comme on le voit, une conséquence directe, naturelle et nécessaire des conditions données, si l'équation (F) est, comme on l'a supposé, exprimée en coordonnées cartésiennes ou *ponctuelles* (*).

Une question quelconque, concernant les propriétés projectives, intrinsèques ou relatives d'une série, peut toujours être regardée comme traduite par une équation de condition entre les coefficients de l'équation générale $F(x, y) = 0$. Soit N le degré de cette équation qu'il faut

---

(*) Si l'équation (F) était exprimée en coordonnées tangentielles, l'*indice* qui en serait la conséquence ne serait plus le même. Ce serait celui qui indique combien il y aurait, dans la *série*, de courbes touchant une droite quelconque. Cette double circonstance se présente accidentellement pour les courbes (et les surfaces) du second degré, parce qu'elles sont à la fois du *second degré* et de la *seconde classe*; mais ce sont les seules qui jouissent de cet heureux privilège. Il cesse pour les courbes et les surfaces d'ordre supérieur.

joindre aux $\frac{m(m+3)}{2} - 1$ autres équations exprimant les conditions communes aux courbes de la série. On voit que la question proposée admet, en général et au plus, μN solutions, puisque μ exprime le degré de l'équation finale qui résulterait de l'élimination de tous les coefficients, moins un, entre ces $\frac{m(m+3)}{2} - 1$ équations et celle de la courbe où ils sont tous au premier degré.

Or, si l'on eût cherché à résoudre la même question relativement à un simple *faisceau* de courbes (ou de surfaces) du même degré, le nombre des solutions eût été N, puisque, dans ce cas, toutes les équations de condition sont du premier degré.

On a donc immédiatement ce théorème important :

Dans toute question relative aux propriétés projectives d'une série de courbes ou de surfaces, le nombre des solutions est, en général et au plus, égal à μ fois ce qu'il serait, dans la même question, pour un simple faisceau, μ étant l'indice de la série.

L'étude générale des propriétés des séries se trouve ainsi réduite à celle des simples faisceaux; simplification d'autant plus importante qu'on ne connaît jusqu'ici, en dehors *du second degré*, aucune autre méthode, que je sache, qui permette d'aborder avec efficacité cette étude difficile. On en conclut, par exemple, ce théorème fondamental, qui se démontre d'ailleurs directement par des considérations fort différentes et directes, savoir que

Le nombre des courbes d'une série de degré m et d'indice μ, qui touchent une droite quelconque, est égal à $2(m-1)\mu$;

Et cet autre :

Le nombre des surfaces d'une série de degré m et d'indice μ, *qui touchent un plan quelconque, est en général égal à* $3\overline{(m-1)}^2\mu$; *et le nombre de celles qui ont un point double est en général* $4(m-1)^3\mu$;

Etc., etc.

Ainsi exprimés, ces théorèmes comprennent toutes les courbes ou toutes les surfaces de la série qui satisfont à l'énoncé, et même celles qui se décomposent en courbes ou surfaces multiples d'ordres inférieurs. Mais j'ai montré, dans le Mémoire précité, que s'il s'agit notamment des *séries élémentaires*, c'est-à-dire des séries où les conditions données ne consistent qu'à traverser des points donnés et à toucher des droites ou des plans donnés, on peut toujours, en regardant ces séries comme étant rangées dans leur ordre naturel, déterminer aisément *à priori* la limite précise à partir de laquelle ces courbes ou surfaces singulières se présentent, de telle sorte que, pour toutes les séries comprises en deçà de cette limite, les théorèmes ci-dessus se rapportent exclusivement à des courbes ou à des surfaces *proprement dites* du degré que l'on considère, sans aucune restriction relative aux courbes ou surfaces singulières que les séries contiennent parfois, mais qu'elles ne contiennent jamais dans ce cas (*).

Mais je n'entrerai pas, à ce sujet, dans plus de détails, mon but n'étant pas de refaire ni de reproduire ici le

(*) Comme il y a continuité dans la succession des *séries* élémentaires qui contiennent les courbes ou surfaces singulières, ainsi que dans celles qui n'en comprennent aucune, et qu'une règle précise et invariable détermine la limite qui sépare les unes des autres, les théorèmes en question ont eux-mêmes toute la précision et la rigueur qu'on peut désirer en mathématiques, où l'on voit, à chaque instant, que certaines propriétés qui ont lieu dans une certaine partie d'une figure, par exemple, cessent d'exister dans une autre, à partir d'un point de démarcation nettement déterminé.

Mémoire de 1866, d'où j'ai extrait les passages qui précèdent.

Je tenais simplement à montrer que l'inexactitude, reconnue par moi depuis assez longtemps, du lemme cité dans le *Giornale di Matematiche,* ne porte aucune atteinte aux théorèmes essentiels et fondamentaux de la théorie des séries de courbes et de surfaces que l'auteur de cet article a en vue.

Je saisis cette occasion pour répondre à une observation contenue dans un article que M. Breton (de Champ) a publié dernièrement dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (2^{e} série, t. VI, p. 522), et qui me concerne, comme étant l'un des auteurs des deux Notices bibliographiques auxquelles ce savant géomètre fait allusion. En faisant l'éloge de l'ouvrage dont il parle, je ne pouvais avoir en vue des questions de priorité, dont les éléments ne m'étaient pas connus et que je n'avais pas étudiées. Je prie donc M. Breton de ne point attribuer à ma rédaction plus de portée qu'elle n'en a à cet égard.