Nouvelles annales de mathématiques

C.-E. Page

Mouvements relatifs à la surface de la terre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 97-112

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__97_0>

MOUVEMENTS RELATIFS A LA SURFACE DE LA TERRE;

PAR M. C.-E. PAGE,
Professeur à l'École d'Artillerie de Vincennes.

La terre tourne autour d'un axe ayant lui-même un mouvement de translation dans l'espace.

Nous savons que dans ce cas l'accélération relative d'un point en mouvement par rapport à la terre est la résultante de l'accélération absolue, de l'accélération d'entraînement prise en signe contraire, enfin de l'accélération centrifuge composée.

Il nous faut d'abord déterminer l'accélération d'entraînement, c'est-à-dire l'accélération d'un point en repos par rapport à la terre. Cette accélération est la résultante de l'accélération centripète due au mouvement de rotation et d'une composante égale et parallèle à l'accélération dont l'axe est animé dans son mouvement de translation.

Or, les forces qui agissent sur tous les points de la terre et qui déterminent le mouvement de translation agissent nécessairement sur le point que l'on considère. Par suite, la composante due au mouvement de translation entre à la fois dans l'accélération absolue et dans l'accélération d'entraînement; cette dernière étant prise en signe contraire, la composante due au mouvement de translation disparaît. D'où l'on conclut que dans les mouvements relatifs à la surface de la terre on peut faire complétement abstraction du mouvement de translation. L'accélération d'entraînement se trouve réduite à l'accélération centripète, qui, prise en signe contraire, donne l'accélération centrifuge.

Le mouvement de rotation de la terre donne donc naissance à l'accélération centrifuge et à l'accélération centrifuge composée.

Toute accélération nous représente l'effet d'une force à laquelle elle est proportionnelle; par conséquent à toutes les autres forces qui sollicitent un corps en mouvement.

Sur la terre, il faut joindre deux nouvelles forces qui sont : la force centrifuge et la force centrifuge composée.

En appelant m la masse du corps, h la perpendiculaire abaissée du centre de gravité sur l'axe, la force centrifuge est dirigée suivant le prolongement de cette perpendiculaire et égale à $m.h.\omega^2$.

En appelant v la vitesse relative du corps, α l'angle que cette vitesse relative fait avec l'axe, $v.\sin\alpha$ est la composante de la vitesse perpendiculaire à l'axe, la force centrifuge composée est égale à $2.\omega.v.\sin\alpha$: elle est perpendiculaire à la fois à l'axe de rotation et à la composante $v.\sin\alpha$.

Pour bien préciser le sens dans lequel elle agit, couchez-vous suivant l'axe, les pieds au pôle sud, la tête au pôle nord : la terre tourne autour de vous de droite à gauche. Transportez-vous parallèlement à vous-même, de manière que vos pieds coïncident avec le centre de gravité du mobile, regardez dans le sens de la composante $v.\sin\alpha$: la force centrifuge composée est dirigée de gauche à droite.

Il nous reste à déterminer la vitesse angulaire ω. C'est la vitesse du point dont la distance à l'axe est de 1 mètre. La durée d'une révolution de la terre est ce qu'on nomme le *jour sidéral*, qui est de $23^h\,56^m\,4^s,1$ ou $86164^s,1$, d'où

$$\omega = \frac{2.\pi}{86164,1} = 0^m,000073.$$

Pesanteur.

La pesanteur est la force qui fait tomber les corps à la surface de la terre : c'est la résultante de l'attraction exercée par la terre et de la force centrifuge.

L'attraction varie avec la distance au centre de la terre ; la force centrifuge varie avec le rayon du parallèle : donc la pesanteur doit varier en grandeur et en direction avec le déplacement du corps.

Mais la distance moyenne de la surface au centre de la terre est d'environ 6376000 mètres ; le rayon du parallèle, pour les points suffisamment éloignés du pôle, est aussi très-grand. Ainsi, à la latitude de Paris, il est d'environ 4780000 mètres ; les déplacements que nous observons à la surface de la terre sont généralement très-petits relativement à ces dimensions. Par suite, nous pouvons admettre que dans toute l'étendue du déplacement la pesanteur conserve une intensité constante et une direction fixe.

Nous avons vu que, à toutes les autres forces qui agissent sur le mobile, il faut joindre la force centrifuge et la force centrifuge composée. Or, la combinaison de la force centrifuge avec la force d'attraction donne la pesanteur : donc, quand on tient compte de sa pesanteur, il suffit d'ajouter à toutes les autres forces la force centrifuge composée.

En appelant p le poids du corps, la force centrifuge composée a pour valeur

$$\frac{2.\omega.p}{g}.v.\sin\alpha = \frac{2.0,000073}{9,81}.p.v.\sin\alpha$$
$$= 0,0000148.p.v.\sin\alpha.$$

Ainsi, pour un corps pesant 1 kilogramme, la force centrifuge composée est égale à un poids de 148 dix-milligrammes multiplié par la composante $v.\sin\alpha$. En supposant cette composante de 500 mètres, ce qui est à peu près la plus grande vitesse que l'on imprime aux projectiles de l'artillerie, la force centrifuge composée est de $7^{gr},40$ par kilogramme.

Il ne faut pas oublier que dans tout ce qui précède on a supposé que le mobile était assez éloigné du pôle pour que les variations de la perpendiculaire abaissée de son centre de gravité sur l'axe de rotation fussent négligéables ; mais si l'on était très-rapproché du pôle, il faudrait tenir compte de ces variations. Nous reviendrons sur cette observation importante dans la discussion des problèmes.

Mouvement d'un corps assujetti à rester sur un plan horizontal.

Prenons pour axe des x une horizontale dirigée de l'ouest vers l'est ;

Pour axe des y la trace horizontale du plan méridien dirigée du nord vers le sud ;

Pour axe des z une verticale dirigée dans le sens de la pesanteur.

Représentons par λ la latitude : c'est l'angle que le plan horizontal fait avec l'axe de rotation.

En supposant le corps soumis seulement à l'action de la pesanteur et de la force centrifuge composée, les équations différentielles du mouvement sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega.\cos\lambda.\frac{dz}{dt} - 2\omega.\sin\lambda.\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega.\sin\lambda.\frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -2\omega.\cos\lambda.\frac{dx}{dt} + g.$$

Le corps étant assujetti à rester sur le plan horizontal, on doit avoir

$$\frac{dz}{dt} = 0, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = 0.$$

En représentant par R la résistance normale du plan, les équations deviennent

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -2\omega . \sin\lambda . \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = 2\omega . \sin\lambda . \frac{dx}{dt},$$

$$0 = -2\omega . \cos\lambda . \frac{dx}{dt} + g - \frac{R}{m}.$$

Multipliant la première par dx, la seconde par dy, et ajoutant, il vient

$$\frac{dx}{dt} . d\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{dy}{dt} . d\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0.$$

Intégrant et déterminant la constante par la condition que la vitesse initiale soit égale à V, on a

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = V^2.$$

En intégrant chacune des deux premières équations séparement, et représentant par ψ l'angle que la vitesse initiale V fait avec l'axe des x, on a

$$\frac{dx}{dt} = V . \cos\psi - 2\omega . \sin\lambda . y,$$

$$\frac{dy}{dt} = V . \sin\psi - 2\omega . \cos\lambda . x.$$

Éliminant $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ entre ces deux équations et la précédente, on en tire

$$\left(y - \frac{V.\cos\psi}{2\omega.\sin\lambda}\right)^2 + \left(x + \frac{V.\sin\psi}{2\omega.\sin\lambda}\right)^2 = \frac{V^2}{4\omega^2.\sin^2\lambda};$$

c'est l'équation d'une circonférence dont le rayon est égal à

$$\frac{V}{2\omega.\sin\lambda},$$

et dont le centre a pour coordonnées

$$y_1 = \frac{V.\cos\psi}{2\omega.\sin\lambda}, \quad x_1 = -\frac{V.\sin\psi}{2\omega.\sin\lambda}.$$

En prenant $\sin\lambda = 0,75$, ce qui est à très-peu près la valeur correspondant à la latitude de Paris , on a

$$\frac{V}{2\omega.\sin\lambda} = \frac{V}{0,0001095} = 9132.V.$$

Par conséquent, sous la latitude de Paris, une bille lancée sur un billard de marbre, avec une vitesse de 1 mètre, au lieu de se mouvoir en ligne droite, tend à décrire une circonférence de 9132 mètres de rayon.

Si nous appelons ω' la vitesse angulaire avec laquelle le rayon tourne autour du centre, il est facile de voir que nous aurons

$$\omega' = 2\omega.\sin\lambda = 0,0001095.$$

Cette vitesse angulaire ω' est indépendante de la vitesse initiale V; de sorte qu'en supposant que le mouvement puisse se continuer, le corps décrirait toujours la circonférence entière dans le même temps et reviendrait au point de départ au bout de 57376 secondes.

En représentant par E le chemin parcouru dans le sens de la vitesse initiale V au bout du temps t;

Par d la déviation latérale à droite au bout du même temps t, nous aurons

$$E = \frac{V}{2\omega.\sin\lambda}.\sin\omega'.t, \quad d = \frac{V}{2\omega.\sin\lambda}(1 - \cos\omega' t).$$

Tant que l'arc $\omega'.t$ reste très-petit, nous pouvons développer $\sin\omega'.t$ et $\cos\omega'.t$ en séries très-convergentes. Si nous prenons le premier terme de chaque série, nous avons

$$E = V.t, \quad d = V.\omega\sin\lambda.t^2, \quad d = \frac{\omega.\sin\lambda}{V}E^2;$$

la force constante qui pousse le mobile vers la droite est

$$m.2\omega.\sin\lambda.v = \frac{2\omega.\sin\lambda}{g}.p.v = 0,0000111.p.v;$$

la troisième équation

$$0 = -2\omega.\cos\lambda.\frac{dx}{dt} + g - \frac{R}{m}$$

fait voir que la résistance R, c'est-à-dire la pression exercée par le mobile sur le plan horizontal, varie avec la direction de la vitesse. Lorsque le corps marche dans le sens du méridien, la pression R est justement égale au poids p; mais lorsqu'il marche de l'est à l'ouest, la pression est augmentée et devient

$$p\left(1 + \frac{2\omega.\cos\lambda}{g}V\right).$$

Elle est diminuée de la même quantité quand le corps marche de l'ouest à l'est.

Sous l'équateur, $\sin\lambda = 0$; la force centrifuge composée devient perpendiculaire au plan horizontal; elle ne peut engendrer aucune déviation latérale, elle produit seulement des différences de pression suivant le sens du mouvement.

Au pôle, $\cos\lambda = 0$, la force centrifuge composée est dirigée dans le plan horizontal; mais les formules trouvées en supposant le déplacement du corps insensible relativement à la longueur de la perpendiculaire abaissée de son centre de gravité sur l'axe ne sont plus applicables. Il faut nécessairement tenir compte des variations de la force centrifuge.

Prenant pour origine le pôle même; pour axe des z, l'axe de la terre; pour axes des x et des y, deux axes rectangulaires quelconques situés dans le plan horizontal, les équations différentielles du mouvement sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega\frac{dy}{dt} + \omega^2.x,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega\frac{dx}{dt} + \omega^2.y,$$

$$0 = g - \frac{R}{m}.$$

Multipliant la première par dx, la seconde par dy, et ajoutant, il vient

$$\frac{dx}{dt}d.\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{dy}{dt}d.\left(\frac{dy}{dt}\right) = \omega^2(x\,dx + y\,dy).$$

En intégrant et représentant par V la vitesse initiale, on a

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = V^2 + \omega^2(x^2 + y^2).$$

Multipliant la première par y, la seconde par x, puis retranchant la première de la seconde, on a

$$x\frac{d^2y}{dt} - y\frac{d^2x}{dt} = 2\omega(x\,dx + y\,dy);$$

en intégrant

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \omega(x^2 + y^2),$$

nous avons donc les deux équations

$$dx^2 + dy^2 = [V^2 + \omega^2(x^2 + y^2)].dt^2,$$
$$x\,dy - y\,dx = \omega(x^2 + y^2).dt.$$

Éliminant dt entre ces deux équations, il vient

$$\frac{\omega(x\,dx + y\,dy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{V(x\,dy - y\,dx)}{x^2 + y^2}.$$

Cette équation s'intègre immédiatement. En remarquant que la direction de l'axe des x étant arbitraire, on peut toujours supposer qu'elle coïncide avec la direction de la vitesse initiale, on a

$$\omega\sqrt{x^2 + y^2} = V.\text{arc.}\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right).$$

C'est l'équation d'une spirale engendrée par un point glissant sur une droite, avec une vitesse constante V, tandis que cette droite tourne autour d'un point avec la vitesse angulaire constante ω.

En représentant par E le chemin parcouru dans le sens de la vitesse initiale au bout du temps t, par d la déviation à droite au bout du même temps, on a

$$E = V.t.\cos\omega.t, \quad d = V.t.\sin\omega.t.$$

En employant la formule trouvée précédemment, on aurait, pour les valeurs de ces mêmes quantités,

$$E = \frac{V}{2\omega}\sin 2\omega.t, \quad d = \frac{V}{2\omega}(1 - \cos 2\omega.t).$$

Tant que l'arc ωt est assez petit pour qu'on puisse se borner à prendre le premier terme du développement du sinus et du cosinus, on trouve dans les deux cas les mêmes valeurs pour E et pour d.

Mouvement d'un corps entièrement libre.

La force centrifuge composée étant toujours perpendiculaire à l'axe de rotation, on rendra les calculs plus faciles en prenant :

Pour axe des z une parallèle à l'axe de la terre dirigée du sud au nord;

Pour axe des y le rayon du parallèle prolongé;

Pour axes des x une horizontale dirigée de l'ouest à l'est.

En représentant toujours par λ l'angle que la verticale fait avec le plan du parallèle, les composantes de la pesanteur seront :

Suivant l'axe des y . . . . . $g.\cos\lambda$;
Suivant l'axe des z . . . . . $g.\sin\lambda$.

Le mobile étant entièrement libre et soumis seulement à l'action de la pesanteur et de la force centrifuge composée, on aura les équations différentielles

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega.\frac{dy}{dt}, \tag{1}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega.\frac{dy}{dt} - g.\cos\lambda, \tag{2}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g.\sin\lambda. \tag{3}$$

Ces trois équations s'intègrent immédiatement, et, en représentant par U, U_1, U_2 les trois composantes de la vitesse initiale, on a

$$\frac{dx}{dt} = U - 2\omega.y,$$

$$\frac{dy}{dt} = U_1 + 2\omega.x - g.\cos\lambda.t,$$

$$\frac{dz}{dt} = U_2 - g.\sin\lambda.t.$$

Cette dernière équation s'intègre une seconde fois et donne

$$z = U_2.t - \frac{1}{2} g.\sin\lambda.t.$$

Multipliant l'équation (1) par dx, et l'équation (2) par dy, puis ajoutant, il vient

$$\frac{dx}{dt}.d\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{dy}{dt}.d\left(\frac{dy}{dt}\right) = - g.\cos\lambda.dy;$$

en intégrant,

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = U^2 + U_1^2 - 2g.\cos\lambda.y.$$

Remplaçant $\frac{dx}{dt}$ par sa valeur $(U - 2\omega.y)$, on en tire

$$dt = \frac{dy}{\sqrt{U_1^2 + 2(2\omega U - g.\cos\lambda) y - 4\omega^2.y^2}}.$$

Pour intégrer cette expression, posons

$$2\omega.U - g.\cos\lambda = n$$

et

$$U_1^2 + 2n.y - 4\omega^2.y^2 = (a + 2\omega y).(b - 2\omega y),$$

puis

$$(a + 2\omega.y) = (b - 2\omega.y).z^2,$$

nous aurons

$$\omega.dt = \frac{dz}{z^2 + 1}.$$

En intégrant et posant

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = k,$$

il vient

$$\omega.t = \text{arc}(\text{tang} = z) - \text{arc}(\text{tang} = k),$$

d'où

$$z^2 = \frac{(k + \operatorname{tang} \omega . t)^2}{(1 - k . \operatorname{tang} \omega . t)^2}.$$

Remplaçant z^2 par sa valeur, on en tire

$$2\omega . y = \frac{n}{2\omega} . (1 - \cos 2\omega . t) + U_1 \sin 2\omega . t).$$

Mettant cette valeur de $2\omega . y$ dans l'équation

$$\frac{dx}{dt} = U - 2\omega y,$$

et intégrant, on a

$$x = V . t - \frac{n}{2\omega}\left(t - \frac{\sin 2\omega . t}{2\omega}\right) + U_1(\cos 2\omega . t - 1).$$

Le problème est complétement résolu, car, en remplaçant n par sa valeur, nous avons les coordonnées du mobile en fonction du temps au moyen des trois équations

$$(\mathrm{A}) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{1}{4\omega^2}[g . \cos\lambda . (2\omega . t - \sin 2\omega\ t) \\ &\qquad + 2\omega U \sin 2\omega\ t + 2\omega U_1(\cos 2\omega . t - 1)], \\ y &= \frac{1}{4\omega^2}[g . \cos\lambda . (\cos 2\omega . t - 1) \\ &\qquad + 2\omega U_1 \sin 2\omega . t - 2\omega U(\cos 2\omega . t - 1)], \\ z &= U_2 . t - \frac{g . \sin\lambda . t^2}{2}. \end{aligned} \right.$$

Il ne reste plus qu'à discuter ces équations.

Mouvement d'un corps tombant librement sans vitesse initiale.

En faisant $U = 0$, $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, les équations (A) se réduisent à

$$x = \frac{g.\cos\lambda.(2\omega.t - \sin 2\omega.t)}{4\omega^2},$$

$$y = \frac{g.\cos\lambda.(\cos 2\omega.t - 1)}{4\omega^2},$$

$$z = -\frac{g.\sin\lambda.t^2}{2}.$$

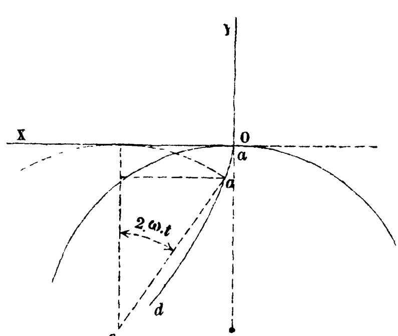
Les deux premières font voir que :

Quand un corps tombe librement, sans vitesse initiale, sa trajectoire relative se projette sur le plan du parallèle suivant un arc de cycloïde.

En effet, sur le prolongement de l'axe OY prenons une longueur

$$aC = \frac{g.\cos\lambda}{4\omega^2};$$

du point C comme centre, avec Ca pour rayon, décrivons une circonférence, puis faisons rouler cette circonférence sur l'axe OX avec une vitesse angulaire 2ω.



Le point a, fixe sur la circonférence et qui à l'origine coïncidait avec le point O, décrit la cycloïde ad, et au bout du temps t, les coordonnées du point a sont

$$x = \frac{g.\cos\lambda}{4\omega^2}.(2\omega.t - \sin 2\omega.t),$$

$$y = \frac{g.\cos\lambda}{4\omega^2}(\cos 2\omega.t - 1).$$

La seconde et la troisième équation représentent la projection de la trajectoire relative sur le plan du méridien.

Les composantes de la vitesse sont

$$\frac{dx}{dt} = \frac{g.\cos\lambda}{2\omega}(1 - \cos 2\omega.t),$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{g.\cos\lambda}{2\omega}.\sin 2\omega.t,$$

$$\frac{dz}{dt} = -g.\sin\lambda.t.$$

En faisant usage de ces formules, il ne faut pas perdre de vue que les équations différentielles sont établies dans l'hypothèse d'un déplacement assez petit relativement aux dimensions de la terre, pour que l'intensité de la pesanteur puisse être regardée comme invariable dans l'étendue de ce déplacement. Il est nécessaire de déterminer les limites entre lesquelles cette hypothèse peut être admise.

D'après une formule connue, en représentant par R le rayon de la terre, par h la différence de hauteur, la variation de g correspondant à la hauteur h est donnée par l'expression

$$g.\frac{2h}{R}.$$

Or, la valeur moyenne de R est 6366000 mètres : il s'ensuit que pour une différence de hauteur de 3000 mètres, la valeur de g varie de près de $\frac{1}{1000}$.

En calculant pour la latitude de Paris le rayon de la circonférence qui engendre la cycloïde, on trouve

$$\frac{g.\cos\lambda}{4\omega^2} = 30374365\text{o mètres.}$$

Cette circonférence roule avec la vitesse angulaire 2ω double de celle de la terre; elle ferait donc un tour entier en 43082 secondes. Par conséquent, elle décrit un quart de degré en $29^s,918$. Cette durée correspond à une hauteur de chute de 4380 mètres. Il s'ensuit que les formules ne doivent jamais être appliquées que pour des valeurs de t bien inférieures à 30 secondes.

La longueur de l'arc $2\omega.t$ doit donc toujours être moindre que $0^m,00438$.

L'arc $2\omega.t$ étant toujours très-petit, $\cos 2\omega.t$ et $\sin 2\omega.t$ peuvent être développés en séries très-convergentes. Nous arrêtant au terme

$$\frac{(2\omega.t)^5}{1.2.3.4.5},$$

nous aurons des valeurs exactes jusqu'à la vingt-sixième décimale; multipliant par le rayon qui est un nombre de neuf chiffres, nous pourrons pousser l'exactitude jusqu'à la seizième décimale.

En effectuant les développements, on a

$$x = \frac{g.\cos\lambda.\omega t^2}{3},$$

$$y = -\frac{g.\cos\lambda.t^2}{2} + \frac{g.\cos\lambda.\omega^2.t^4}{2.3},$$

$$z = -\frac{g.\sin\lambda.t^2}{2}.$$

Changeons les axes, et prenons :

Le nouvel axe des z dirigé suivant la verticale en sens contraire de la pesanteur ;

Le nouvel axe des y dirigé suivant la méridienne et du nord au sud;

L'axe des x restant le même.

Représentons par x_1, y_1, z_1 les coordonnées rapportées aux nouveaux axes, nous avons

$$x_1 = x,$$
$$y_1 = y.\sin\lambda - z.\cos\lambda,$$
$$z_1 = z.\sin\lambda + y.\cos\lambda;$$

d'ou

$$r_1 = \frac{1}{2}.g.t^2.\frac{2}{3}.\cos\lambda.\omega.t,$$

$$y_1 = \frac{1}{2}.g.t^2.\frac{1}{3}.\sin\lambda.\cos\lambda.\omega^2.t^2,$$

$$z_1 = -\frac{1}{2}.g.t^2\left(1 - \frac{1}{3}\cos^2.\lambda.\omega^2.t^2\right).$$

Le facteur $\frac{1}{2}.g.t^2$ est la hauteur de chute correspondant à l'hypothèse de l'immobilité de la terre. On voit qu'en tenant compte de la rotation, cette hauteur doit être un peu diminuée.

Le mobile est dévié vers l'est et vers le sud; mais cette dernière déviation est beaucoup plus faible que la première.

Pour la latitude de Paris et pour $t = 20$ secondes, on a

$$\frac{1}{2}g.t^2 = 1971^{\text{m}},60,$$
$$x_1 = 0,1266555,$$
$$y_1 = 0,0006931,$$
$$z_1 = 1971,5993900$$