NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solution de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 73-84

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__73_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1867, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 751

(voir 2e série, t. V, p. 48);

PAR M. ARMAND LEVY,
Élève du lycée de Metz.

La surface de révolution engendrée par une ellipse de Cassini tournant autour de son axe non focal est coupée par un plan bitangent suivant deux cercles.

En général, *si l'on coupe le tore par un plan parallèle à l'axe du tore, la surface engendrée par la révolution de la section plane ainsi obtenue autour de son axe* (parallèle à celui du tore) *sera coupée par un plan bitangent suivant deux cercles.* (DARBOUX.)

L'ellipse de Cassini est une courbe du quatrième degré ayant deux points doubles, les points où tous les cercles de son plan rencontrent la droite de l'infini; ces deux points, considérés comme symétriques par rapport à l'axe non focal, engendreront, par la rotation de la courbe, un parallèle double, courbe d'intersection de toutes les sphères avec le plan de l'infini. La section du tore par un plan bitangent a quatre points doubles, à savoir deux points sur le cercle de l'infini et les deux points de tangence; par ces quatre points et par un point quelconque de la courbe faisons passer une conique : elle coupe la courbe en un point, plus en quatre points doubles, c'est-à-dire en neuf points. Or une conique ne peut couper une courbe du quatrième degré qu'en huit points, à moins d'en faire partie; donc la conique fait partie de la section. La courbe étant du quatrième degré contient encore une autre conique ayant deux points sur le cercle de l'infini. La section est donc composée de deux coniques rencontrant la droite de l'infini aux mêmes points que tous les cercles du plan, c'est-à-dire de deux cercles.

Coupons le tore par un plan parallèle à son axe, la surface engendrée par la révolution de la section plane ainsi obtenue autour de son axe (parallèle à celui du tore) a un parallèle double à l'infini. Par la même démonstration que la précédente, on peut faire voir que la surface ainsi obtenue est coupée par un plan bitangent suivant deux cercles.

Note. — Autres solutions de MM. Marques Braga, Viant, élèves de l'École Polytechnique; Renaud, élève du lycée Louis-le-Grand.

Question 763;

PAR M. FERDINAND ROUX,
Élève du lycée de Nîmes.

Trouver la forme générale d'une fonction telle, que

$$\varphi(x+y)\varphi(x-y) = [\varphi(x)+\varphi(y)][\varphi(x)-\varphi(y)]. \tag{1}$$

(J.-CH. DUPAIN.)

Si l'on différentie cette égalité par rapport à x, il vient

$$\varphi(x+y)\varphi'(x-y)+\varphi'(x+y)\varphi(x-y) = 2\varphi(x)\varphi'(x).$$

Différentiant celle-ci par rapport à y, on a

$$\varphi(x+y)\varphi''(x-y)-\varphi''(x+y)\varphi(x-y) = 0;$$

d'où

$$\frac{\varphi''(x-y)}{\varphi(x-y)} = \frac{\varphi''(x+y)}{\varphi(x+y)} = \text{const.}$$

Toute fonction qui vérifie l'équation (1) est donc du nombre de celles qui ont un rapport constant avec leurs dérivées secondes.

1° Celles pour lesquelles ce rapport est zéro sont de la forme

$$\lambda x + \mu,$$

puisque

$$\varphi'' = 0;$$

d'ailleurs une telle fonction vérifie l'équation (1) si $\mu = 0$.

2° Si u et v sont deux fonctions qui satisfassent à la condition

$$\varphi''(x) = a\varphi(x),$$

$\lambda u + \mu v$ la vérifiera évidemment; ce sera donc la forme la plus générale des fonctions qui la vérifient, puisque cette condition ne laisse indéterminés que deux coefficients de leurs développements en séries, à savoir $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$.

Or on connaît deux solutions immédiates $e^{x\sqrt{a}}$, $e^{-x\sqrt{a}}$, donc

$$\varphi(x) = \lambda e^{x\sqrt{a}} + \mu e^{-x\sqrt{a}}.$$

Substituons cette valeur dans l'équation (1), en posant

$$e^{(x+y)\sqrt{a}} = p, \quad e^{(x-y)\sqrt{a}} = q,$$

il vient, après réduction,

$$(\lambda\mu + \lambda^2)\frac{p}{q} + (\lambda\mu + \mu^2)\frac{q}{p} = 0,$$

ce qui ne peut se réduire à une identité que si l'on a

$$\text{ou}\quad \lambda = 0 \quad\text{et}\quad \mu = 0, \qquad \text{ou}\quad \lambda = -\mu;$$

donc la forme générale qui résout le problème est

$$\lambda\left(e^{x\sqrt{a}} - e^{-x\sqrt{a}}\right).$$

Elle se décompose en deux autres : pour a positif $= m^2$,

$$\lambda\left(e^{mx} - e^{-mx}\right);$$

pour a négatif $= -m^2$, d'après le théorème d'Euler,

$$2\lambda\sqrt{-1}\sin mx.$$

On a donc les trois types

$$\lambda x, \quad \lambda\left(e^{mx} - e^{-mx}\right), \quad \lambda \sin mx.$$

Note. — Cette question, qui dépend au fond de l'intégration d'une équation aux différentielles partielles, a été résolue en outre à peu près de la même manière par MM. Niébylowski, élève de l'École Normale; Haag, ingenieur des Ponts et Chaussees; Bignon, de Lima. M. C. Laduron, de Liége, emploie le développement en série, et n'obtient sous forme finie qu'une solution particulière.

Question 778;

PAR M. G.-R. MAFFIOTTI,
Élève de M. Genocchi, à Turin.

Si l'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, il en est de même de celle-ci

$$af(x) + bf'(x) + cf''(x) + \ldots = 0,$$

les constantes a, b, c étant telles, que l'équation

$$a + bz + cz^2 + \ldots = 0$$

n'ait que des racines réelles.

On sait que si les racines de $\varphi(x) = 0$ sont toutes réelles, l'équation

$$\varphi(x) - \alpha\varphi'(x) = 0$$

n'aura que des racines réelles, α étant une quantité réelle arbitraire. J'applique ce théorème à l'équation $f(x) = 0$, en donnant à α la valeur x_1, et j'obtiens l'équation

$$f(x) - x_1 f'(x) = 0,$$

qui aura toutes ses racines réelles; le même principe appliqué à cette dernière équation, en donnant à α la valeur x_2, donne l'équation

$$f(x) \begin{array}{l|} -x_1 \\ -x_2 \end{array}\, f'(x) + x_1 x_2 f''(x) = 0,$$

qui aura aussi toutes ses racines réelles. On obtient avec le même procédé, en donnant à α la valeur x_3, l'équation à racines réelles

$$f(x) \begin{array}{l|} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{array}\, f'(x) \begin{array}{l|} +x_1 x_2 \\ +x_1 x_3 \\ +x_2 x_3 \end{array}\, f''(x) - x_1 x_2 x_3 f'''(x) = 0,$$

et ainsi de suite. La loi d'après laquelle se forment les coefficients de $f(x), f'(x), f''(x), \ldots$ dans ces équations et dans celles qu'on en déduirait en appliquant successivement le théorème énoncé ci-dessus est évidente. Ces coefficients sont ceux qu'aurait une équation dont les racines seraient $x_1, x_2, x_3, \ldots$. De sorte que, après avoir appliqué m fois le théorème [je supposerai que m est le degré de $f(x)$], j'arriverai à une équation de la forme

$$f(x) - \Sigma x_1 f'(x) + \Sigma x_1 x_2 . f''(x) - \ldots \pm x_1 x_2 \ldots x_m f^m(x) = 0,$$

et cette équation aura toutes ses racines réelles. Il est clair maintenant que pour rendre cette équation identique avec l'équation (1) il suffit que les quantités arbitraires x_1, x_2,..., x_m soient prises égales aux réciproques des m racines de l'équation (2). Le théorème est donc démontré.

Question 779;

Par M. G.-R. MAFFIOTTI,
Élève de M. Genocchi, à Turin.

Supposant toujours que l'équation

$$(1)\qquad a + bz + cz^2 + \ldots = 0$$

ait toutes ses racines réelles, je fais

$$\frac{1}{a + bz + cz^2 + \ldots} = A + Bz + Cz^2 + \ldots;$$

cela admis, je dis que si l'équation $f(x) = 0$ *a toutes ses racines imaginaires, il en est de même de*

$$(2)\qquad Af(x) + Bf'(x) + Cf''(x) + \ldots = 0.$$

Si $f(x) = 0$ a toutes ses racines imaginaires, on sait qu'il en est de même de

$$f(x) + \alpha f'(x) + \alpha^2 f''(x) + \ldots + \alpha^m f^m(x) = 0$$

(c'est la question 777).

En suivant la même méthode que j'ai suivie dans la question précédente, j'applique à l'équation $f(x) = 0$ le théorème susdit, en prenant pour α la valeur x_1; j'applique ensuite le même théorème à l'équation résultante, en prenant pour α la valeur x_2, et ainsi de suite. Après m de ces opérations [m étant le degré de $f(x)$], j'arriverai à une équation qui aura toutes les racines imaginaires, et qui sera de la forme

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} f(x) + S_1 f'(x) + [S(x_1 x_2) + S_2] f''(x) \\ \qquad + [S(x_1 x_2 x_3) + S(x_1^2 x_2) + S_3] f'''(x) + \ldots = 0, \end{array}\right.$$

où $S_p = x_1^p + \ldots + x_m^p$, et $S(x_1 x_2)$, $S(x_1 x_2 x_3)$, $S(x_1^2 x_2)\ldots$ sont les fonctions symétriques à deux, trois,... lettres de $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

On démontrerait simplement cette formule, si cela était nécessaire, en faisant voir qu'elle est vraie pour $n+1$ facteurs, si elle est vraie pour n; cela suffirait, puisqu'elle est vérifiée pour $n = 1, 2, \ldots$.

Voyons maintenant s'il est possible de trouver pour x_1, $x_2, \ldots, x_m$ des valeurs réelles telles, que les coefficients de l'équation (3) soient identiques avec les coefficients de l'équation (2).

Si $z_1, z_2, \ldots, z_m$ sont les m racines de l'équation (1), on aura par hypothèse

$$\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\ldots(z-z_m)} = A + Bz + Cz^2 + \ldots.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{1}{z-z_1} = -\frac{1}{z_1}\left(1 + \frac{1}{z_1} z + \frac{1}{z_1^2} z^2 + \ldots\right),$$

$$\frac{1}{z-z_2} = -\frac{1}{z_2}\left(1 + \frac{1}{z_2} z + \frac{1}{z_2^2} z^2 + \ldots\right),$$

$$\frac{1}{z-z_3} = -\frac{1}{z_3}\left(1 + \frac{1}{z_3} z + \frac{1}{z_3^3} z^2 + \ldots\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{z-z_m} = -\frac{1}{z_m}\left(1 + \frac{1}{z_m} z + \frac{1}{z_m^2} z^2 + \ldots\right).$$

Donc, en multipliant membre à membre,

$$\begin{aligned}A + Bz + Cz^2 + \ldots\\ = \frac{1}{z_1 z_2 \ldots z_m}\Big\{ 1 + zS_1 + z^2\left[S\left(\frac{1}{z_1}\frac{1}{z_2}\right) + S_2\right]\\ + z^3\left[S\left(\frac{1}{z_1}\frac{1}{z_2}\frac{1}{z_3}\right) + S\left(\frac{1}{z_1^2}\frac{1}{z_2}\right) + S_3\right] + \ldots\Big\}.\end{aligned}$$

Cette équation devant être identique, puisque les deux membres représentent également le développement d'une même fonction suivant les puissances ascendantes de la variable, on aura

$$A = \frac{1}{z_1 z_2 \ldots z_m},$$

$$B = \frac{1}{z_1 z_2 \ldots z_m} S_1,$$

$$C = \frac{1}{z_1 z_2 \ldots z_m}\left[S\left(\frac{1}{z_1}\frac{1}{z_2}\right) + S_2\right], \ldots,$$

d'où l'on conclut que pour rendre l'équation (3) identique avec l'équation (2) il suffit de prendre pour x_1, $x_2, \ldots, x_m$ les réciproques des m racines de l'équation (1).

C. Q. F. D.

Note. — Les questions 778 et 779 ont aussi été résolues par M. de Grossouvre.

Questions 782, 783 *et* 784

(voir 2ᵉ serie, t. V, p. 480);

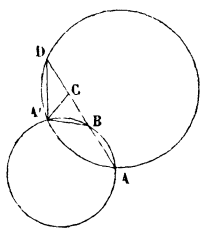
PAR M. ROBERT DURAND,

Élève du lycée de Caen (classe de M. Toussaint).

783. *Si une figure qui reste toujours semblable à une figure donnée se meut de manière que trois de ses droites passent par des points fixes, toute autre droite de la figure passera aussi par un point fixe.* (PETERSEN.)

Lemme. — *Si l'on prend sur une droite* ABD, *assujettie à passer par un des points* A *d'intersection de deux circonférences, un point* C *tel, que ses distances* CD, CB *aux points* B, D *où la droite coupe les deux circonférences soient dans un rapport constant* k, *ce point décrira une circonférence.*

Fig. 1.



En effet, soit A' le second point d'intersection; menons A'D, A'C, A'B, on a

$$\frac{\text{CB}}{\text{CD}} = k;$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{\text{BD}}{\text{CD}} = k + 1.$$

Le triangle A'BD étant toujours semblable à lui-même, puisque les angles A'DB, A'BD sont constants, donne

$$(2) \qquad \frac{\text{A}'\text{D}}{\text{BD}} = k',$$

et, en multipliant les égalités (1) et (2),

$$\frac{\text{A}'\text{D}}{\text{CD}} = (k+1)k' = \text{C}.$$

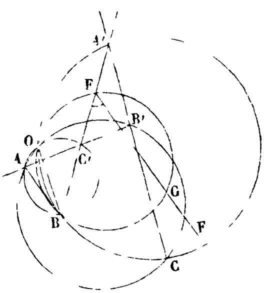
Ainsi le triangle A'CD a un angle constant A'DC compris entre deux côtés dont le rapport est constant : il est toujours semblable à lui-même ; par suite, l'angle A′CB est constant, et le point C décrit une circonférence de cercle passant par les points A, A′ communs aux deux premières circonférences, ce qui démontre le lemme.

Considérons maintenant trois droites A′C′, B′C′, A′B′ d'une figure satisfaisant aux conditions de l'énoncé, qui passent par trois points fixes B, A, C.

Dans le mouvement, le triangle formé par ces droites reste semblable à lui-même; les angles sont donc constants et ses sommets décrivent trois circonférences qui se coupent au point O.

En effet, soit O le point d'intersection des circonfé-

FIG 2.



rences décrites sur AB, AC comme cordes, on a

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{AOB} = \mathrm{AC'B},\\
&\mathrm{AOC} = \mathrm{AB'C},\\
\text{retranchons}\quad &\overline{\mathrm{BOC} = \mathrm{BA'C}};
\end{aligned}
$$

donc O appartient à la circonférence décrite sur BC.

Une quatrième droite EF de la figure sera déterminée par le point E où elle coupe A′C′ et par l'angle C′EF qu'elle fait avec cette droite.

Or le rapport $\frac{\mathrm{EC'}}{\mathrm{EA'}}$ est invariable; donc, en vertu du lemme précédent, E décrit une circonférence passant par O et par B. Soit G le point où elle rencontre EF; l'arc BG mesure le double de l'angle constant C′EF : le point G est donc fixe et le théorème se trouve démontré.

2° En transformant la figure par la méthode des polaires réciproques, on obtient le théorème 782, savoir :

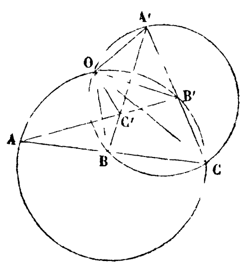
782. *Si une figure qui reste toujours semblable à une figure donnée se meut de manière que trois points décrivent des lignes droites, tout autre point de la figure décrira une ligne droite.* (Petersen.)

3° Si nous supposons les trois points A, B, C en ligne droite, la figure représente un quadrilatère complet et trois cercles circonscrits à trois des quatre triangles qui le composent : ces trois cercles passent par un même point. On en conclut par analogie que le cercle circonscrit au quatrième triangle B′C′A′ passe aussi par ce point. On pourrait le démontrer directement de cette manière

$$OB'C' = OB'A = OCA = OCB = OA'B = OA'C';$$

le quadrilatère OA′B′C′ est donc inscriptible; donc, etc. Les triangles qui ont pour sommet O et pour bases deux

Fig. 3.



côtés opposés du quadrilatère sont semblables puisqu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun OBC′ = OCA′, OC′A′ = OB′A′ comme inscrits dans les mêmes segments. De là le théorème suivant :

784. *Si l'on ôte à un quadrilatère complet successivement chacun de ses côtés, les cercles circonscrits aux quatre triangles qu'on obtient passeront par un même point, et les triangles qui ont pour sommet ce point et pour bases les deux côtés opposés du quadrilatère seront semblables.* (PETERSEN.)

Note. — La question 784 a été résolue en outre par MM. Laisant; Driant; Victor Strekaloff, de l'Université de Saint-Pétersbourg; Lamiche, Laugier, du lycée Louis-le-Grand; Paul Besson, du lycée de Besançon; Moreau, du lycée Saint-Louis; Paul Vivier, du lycée de Strasbourg; de Villepin, du collége Stanislas; Welsch, du lycée de Metz; Thomas, du collége de Melun.