Nouvelles annales de mathématiques

A. Genocchi

Démonstration d'un théorème de M. Sylvester comprenant la règle de Newton sur le nombre des racines imaginaires

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 5-20

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__5_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE M. SYLVESTER comprenant la règle de Newton sur le nombre des racines imaginaires;

PAR M. A. GENOCCHI.

1. Soit

$$f(x) = 0$$

une équation du degré m; formons avec la fonction entière $f(x)$ et avec ses dérivées la suite

$$(f) \qquad f(x), \quad f'(x), \quad f''(x), \ldots, \quad f^m(x).$$

Formons une autre suite

$$(G) \qquad G(x), \quad G_1(x), \quad G_2(x), \ldots, \quad G_m(x),$$

en posant

$$G(x) = (fx)^2, \quad G_r(x) = (f^r x)^2 - \gamma_r f^{r-1} x . f^{r+1} x,$$
$$G_m(x) = (f^m x)^2,$$

où r désigne les nombres $1, 2, \ldots, m-1$, et γ_r la fraction $\frac{\mu + r - 1}{\mu + r}$, μ étant un nombre fixe quelconque positif ou négatif, mais non compris entre -1 et $-m$. Il faudra comparer les signes de ces deux séries; mais d'abord nous exposerons quelques propriétés des fonctions qui les composent.

§ I. — *Propriétés des fonctions* (f) *et* (G).

2. Les quantités $f^m(x)$, $G_m(x)$ sont constantes; $G_m(x)$ est positive. La fonction $G(x)$ sera aussi positive, tant qu'elle ne s'évanouira pas; $G_r(x)$ sera positive lorsque $f^{r-1}(x)$ et $f^{r+1}(x)$ seront de signes contraires, ou que l'une de ces fonctions s'évanouira, la fonction $f^r(x)$ ne s'annulant pas.

Toutes ces fonctions étant entières et partant continues, si l'une d'elles n'est pas nulle pour une valeur particulière $x = a$, elle conservera dans le voisinage de cette valeur le même signe qu'elle prend lorsqu'on fait $x = a$.

3. Désignons par $\varphi(x)$ une de ces fonctions qui s'annule pour $x = a$, et posons

$$\varphi(x) = (x - a)^n \psi(x).$$

On aura, en prenant les dérivées,

$$\varphi'(x) = n(x - a)^{n-1}\psi(x) + (x - a)^n \psi'(x),$$

et, par conséquent,

$$(x - a)\varphi'(x) = \left[n + \frac{(x - a)\psi'(x)}{\psi(x)}\right]\varphi(x),$$

ou

$$\varepsilon\varphi'(a + \varepsilon) = h\varphi(a + \varepsilon),$$

si l'on fait

$$x = a + \varepsilon, \quad n + \frac{\varepsilon\psi'(a + \varepsilon)}{\psi(a + \varepsilon)} = h.$$

Si ε est suffisamment petit, la quantité h sera finie et positive, puisqu'on peut supposer que $\psi(a)$ soit une quantité finie différente de zéro, n étant un nombre entier positif. On déduit de cette formule le théorème connu, d'après lequel les fonctions $\varphi(a+\varepsilon)$, $\varphi'(a+\varepsilon)$ sont de même signe pour ε positif, et de signes contraires pour ε négatif.

4. Si $f^r(a)$ est nulle, mais que $f^{r-1}(a)$ soit différente de zéro, la fonction $G_r(x)$ aura, dans le voisinage de $x=a$, le signe du produit $-f^{r-1}(x)f^{r+1}(x)$, car on pourra faire (n° 3)

$$\varepsilon f^{r+1}(a+\varepsilon) = hf^r(a+\varepsilon),$$

et, par suite,

$$G_r(a+\varepsilon) = -f^{r-1}(a+\varepsilon)f^{r+1}(a+\varepsilon)\left[\gamma_r - \varepsilon^2\frac{f^{r+1}(a+\varepsilon)}{h^2 f^{r-1}(a+\varepsilon)}\right].$$

Il en résulte que dans le voisinage de $x=a$ la fonction $G_r(x)$ changera ou ne changera pas de signe, suivant que la fonction $f^{r+1}(x)$ en changera ou n'en changera pas elle-même.

5. Si $f^{r-1}(a)$ est nulle, la fonction $G_r(x)$ sera toujours positive dans le voisinage de $x=a$. Car, en faisant

$$f^{r-1}(x) = (x-a)^n\varphi(x),$$

on aura

$$f^r(x) = n(x-a)^{n-1}\varphi(x) + (x-a)^n\varphi'(x),$$

$$f^{r+1}(x) = n(n-1)(x-a)^{n-2}\varphi(x) + (x-a)^{n-1}\psi(x);$$

$\varphi(x)$ et $\psi(x)$ étant deux fonctions entières : il s'ensuit

$$G_r(x) = (x-a)^{2n}\{n(\varphi x)^2[n-(n-1)\gamma_r] + (x-a)F(x)\},$$

$F(x)$ étant aussi une fonction entière. Mais l'expression de γ_r donne

$$n-(n-1)\gamma_r = \frac{n+\mu+r-1}{\mu+r},$$

quantité positive pour $\mu+1>0$ et pour $\mu+m<0$, puisque la plus petite valeur de r est 1, et la plus grande valeur de n est $m - r + 1$. Donc, si x est peu différent de a, la valeur de $G_r(x)$ sera positive.

Le coefficient $n - (n-1)\gamma_r$ serait nul si l'on avait en même temps

$$\mu = -m \quad \text{et} \quad n = m - r + 1;$$

dans ce cas n serait au moins égal à 2, la plus grande valeur de r étant $m - 1$. Mais, de plus, on aurait

$$f^{r-1}(x) = A(x-a)^n,$$

avec A constant, et il viendrait

$$G_r(x) = 0,$$

quel que soit x.

On ne peut supposer $\mu = -1$, car γ_1 serait infini.

6. En désignant par $G'_r(x)$ la dérivée de $G_r(x)$, on a

$$G'_r(x) = 2f^r x . f^{r+1} x - \gamma_r(f^r x . f^{r+1} x + f^{r-1} x . f^{r+2} x)$$

ou

$$G'_r(x) = (2-\gamma_r) f^r x . f^{r+1} x - \frac{f^{r+2} x}{f^{r+1} x}[(f^r x)^2 - G_r(x)],$$

ce qui devient

$$G'_r(x) - \frac{f^{r+2} x}{f^{r+1} x} G_r(x) = \frac{fx}{\gamma_{r+1} f^{r+1} x}[(f^{r+1} x)^2 - \gamma_{r+1} f^r x . f^{r+2} x],$$

savoir

$$G'_r(x) - \frac{f^{r+2}(x)}{f^{r+1}(x)} G_r(x) = \frac{f(x)}{\gamma_{r+1} f^{r+1}(x)} G_{r+1}(x),$$

en observant que l'expression de γ_r satisfait à l'équation aux différences finies

$$2 - \gamma_r = \frac{1}{\gamma_{r+1}}.$$

Soit maintenant $x = a$ une valeur qui annule $G_r(x)$;

d'après le n° 3 on aura pour $x - a + \varepsilon$, ε étant suffisamment petit,

$$\varepsilon G'_r(x) = h_r G_r(x),$$

où h_r sera une quantité positive qui ne s'évanouit pas avec ε. En faisant

$$\gamma_{r+1}\left(h_r - \varepsilon \frac{f^{r+2}x}{f^{r+1}x}\right) = \frac{1}{H_r},$$

et substituant dans la formule précédente, il vient

$$G_r(a+\varepsilon) = H_r \varepsilon \frac{f^r(a+\varepsilon)}{f^{r+1}(a+\varepsilon)} G_{r+1}(a+\varepsilon).$$

Si $f^{r+1}(a)$ ne s'annule pas, la quantité H_r sera positive et finie pour des valeurs suffisamment petites de ε, et par suite les rapports $\frac{f^r(a+\varepsilon)}{f^{r+1}(a+\varepsilon)}$, $\frac{G_r(a+\varepsilon)}{G_{r+1}(a+\varepsilon)}$ seront de même signe lorsque ε sera positif, de signes contraires lorsque ε sera négatif.

§ II. — *Théorème de M. Sylvester.*

7. Nous dirons que les suites (f) et (G) présentent une ou plusieurs *doubles permanences*, lorsqu'à deux termes consécutifs de même signe $f^{r-1}(x)$, $f^r(x)$ de la première suite correspondent deux termes $G_{r-1}(x)$, $G_r(x)$ de la seconde, aussi de même signe, et que cette circonstance se vérifie dans un ou plusieurs couples de termes. Le nombre total des doubles permanences ne peut varier que si une ou plusieurs des fonctions (f) ou (G) changent de signes, et cela ne peut arriver que si elles s'évanouissent. Nous supposerons donc que la variable x, en restant réelle et croissant par degrés insensibles, passe par une valeur a qui fait évanouir l'une de ces fonctions, et distinguerons trois cas :

1° L'une des fonctions correspondantes $f^r(x)$, $G_r(x)$

change de signe en s'annulant pour la valeur $x=a$, tandis que l'autre ne s'annule pas.

Soit $f^r(a)=0$, et $G_r(a)$ différente de zéro; aucune des fonctions $f^{r-1}(a)$, $f^{r+1}(a)$ ne sera nulle, et $G_{r-1}(a)$, $G_{r+1}(a)$ seront positives (n° 2). Car, si $f^{r-1}(a)$, $f^{r+1}(a)$ sont de signes contraires, $G_r(a)$ sera positive, et pour ε positif et suffisamment petit, les fonctions $f^{r-1}(a-\varepsilon)$ et $f^r(a-\varepsilon)$, $f^r(a+\varepsilon)$ et $f^{r+1}(a+\varepsilon)$ offriront les mêmes signes (n° 3); donc le groupe

$$(r)\qquad \begin{cases} f^{r-1}(x), & f^r(x), \quad f^{r+1}(x), \\ G_{r-1}(x), & G_r(x), \quad G_{r+1}(x), \end{cases}$$

présentera une double permanence, tant pour $x=a-\varepsilon$ que pour $x=a+\varepsilon$. Si $f^{r-1}(a)$, $f^{r+1}(a)$ sont de même signe, $G_r(x)$ sera négative, et il n'y aura pas de doubles permanences dans ce groupe, ni pour $x=a+\varepsilon$, ni pour $x=a-\varepsilon$.

Soient, au contraire, $G_r(a)=0$, et $f^r(a)$ différente de zéro: $f^{r-1}(a)$ et $f^{r+1}(a)$ seront aussi différentes de zéro, et seront affectées du même signe, car sans cela on aurait $G_r(a)>0$. Ainsi, dans le groupe (r), les termes de la première ligne conserveront pour $x=a\pm\varepsilon$ les signes qui les affectent pour $x=a$, et si $f^r(a)$ est d'un signe contraire à celui de $f^{r-1}(a)$ et $f^{r+1}(a)$, ce groupe n'offrira pas de doubles permanences dans le voisinage de $x=a$. Si $f^r(a)$ est du même signe que $f^{r-1}(a)$ et $f^{r+1}(a)$, $G_r(a+\varepsilon)$ et $G_{r+1}(a+\varepsilon)$ seront de même signe, et $G_r(a-\varepsilon)$ et $G_{r+1}(a-\varepsilon)$ seront de signes contraires (n° 6); donc, si $G_{r-1}(a)$ est de signe contraire à $G_r(a-\varepsilon)$, on gagnera deux doubles permanences; si $G_{r-1}(a)$ est de même signe que $G_r(a-\varepsilon)$, il y aura une double permanence pour $x=a-\varepsilon$, et une double permanence pour $x=a+\varepsilon$. Si $G_{r-1}(a)=0$, les fonctions $G_{r-1}(x)$, $G_r(x)$ seront de même signe pour $x=a+\varepsilon$, et de signes contraires pour $x = a - \varepsilon$ (n° 6), et l'on gagnera deux doubles permanences dans cet intervalle.

2° Soient

$$f^r(a) = 0 \quad \text{et} \quad G_r(a) = 0:$$

il faudra que l'une au moins des fonctions $f^{r-1}(a)$, $f^{r+1}(a)$ soit nulle. Soient $f^{r+1}(a) = 0$, et $f^{r-1}(a)$ différente de zéro : on aura

$$G_{r-1}(a) > 0 \text{ (n° 2)} \quad \text{et} \quad G_{r+1}(a \pm \varepsilon) > 0 \text{ (n° 5)};$$

en supposant d'ailleurs que $f^r(x)$ change de signe tandis que x passe par a, sa dérivée $f^{r+1}(x)$ n'en changera pas (n° 3), et il en sera de même de la fonction $G_r(x)$ (n° 4). Or, si $G_r(a \pm \varepsilon)$ est négative, le groupe (r) ne présentera pas de doubles permanences pour $x = a \pm \varepsilon$; si $G_r(a \pm \varepsilon)$ est positive, ce groupe présentera une double permanence tant pour $x = a - \varepsilon$ que pour $x = a + \varepsilon$, lorsque $f^{r-1}(a)$ sera de même signe que $f^r(a - \varepsilon)$, et présentera deux doubles permanences pour $x = a + \varepsilon$, aucune pour $x = a - \varepsilon$ dans le cas contraire.

Soit maintenant

$$f^{r-1}(a) = 0;$$

il n'y aura pas de doubles permanences dans le groupe (r) pour $x = a + \varepsilon$ (n° 3). Si $f^{r-2}(a)$ est nulle aussi, les fonctions $G_{r-1}(x)$, $G_r(x)$, $G_{r+1}(x)$ seront toutes positives dans le voisinage de $x = a$ (n° 5), et il y aura deux doubles permanences pour $x = a + \varepsilon$. Il en sera de même si $f^{r-2}(a)$ est de signe contraire à $f^r(a + \varepsilon)$, puisque $G_{r-1}(a + \varepsilon)$, $G_r(a + \varepsilon)$, $G_{r+1}(a + \varepsilon)$ seront encore positives. Enfin, si $f^{r-2}(a)$, différente de zéro, est affectée du même signe que $f^r(a + \varepsilon)$, on aura encore deux doubles permanences dans le cas de $G_{r-1}(a + \varepsilon) > 0$, et l'on en aura une seule dans le cas contraire, car $G_r(a + \varepsilon)$ et $G_{r+1}(a + \varepsilon)$ seront toujours positives (n° 5). Mais, en supposant que $f^r(x)$ change de signe dans le voisinage de $x = a$, la fonction $G_{r-1}(x)$ changera aussi de signe (n^o 4); donc, si

$$G_{r-1}(a+\varepsilon) < 0,$$

on aura

$$G_{r-1}(a-\varepsilon) > 0;$$

d'ailleurs $G_{r-2}(a)$ sera positive (n^o 2), et $f^{r-2}(a)$, ayant le même signe que $f^r(a+\varepsilon)$, sera aussi de même signe que $f^{r-1}(a \pm \varepsilon)$; par conséquent les couples correspondants

$$f^{r-2}(x),\quad f^{r-1}(x) \quad \text{et} \quad G_{r-2}(x),\quad G_{r-1}(x)$$

présenteront une double permanence pour $x = a - \varepsilon$, aucune pour $x = a + \varepsilon$, de manière qu'en ajoutant les termes $f^{r-2}(x)$, $G_{r-2}(x)$ au groupe (r), on aura une double permanence pour $x = a - \varepsilon$, et une pour $x = a + \varepsilon$.

Si $f^r(x)$ ne change pas de signe en s'évanouissant pour $x = a$, sa dérivée $f^{r+1}(x)$ en changera (n^o 3), et, comme on aura

$$f^{r+1}(a) = 0 \quad \text{et} \quad G_{r+1}(a) = 0,$$

on pourra considérer les fonctions $f^{r+1}(x)$, $G_{r+1}(x)$ au lieu de $f^r(x)$, $G_r(x)$.

3° Soit $x = a$ une racine de l'équation $f(x) = 0$. Si cette racine est simple, $f'(a)$ sera différente de zéro, et $G_1(a) = (f'a)^2$ sera positive; ainsi, d'après le n^o 3, les premiers deux termes des suites (f) et (G) gagneront une double permanence de $x = a - \varepsilon$ à $x = a + \varepsilon$. Si cette racine est multiple du degré n, les signes des $n + 1$ fonctions

$$f(x),\quad f'(x),\quad f''(x),\ldots,\quad f^{n-1}(x),\quad f^n(x)$$

seront alternés pour $x = a - \varepsilon$, et seront tous égaux pour $x = a + \varepsilon$ en vertu du même théorème; d'ailleurs les termes correspondants de la suite (G) seront toujours positifs dans le voisinage de $x = a$ (n° 5) ; il y aura donc n doubles permanences gagnées.

Tous ces raisonnements subsistent encore dans le cas d'exception signalé au n° 5, c'est-à-dire lorsqu'on prend $\mu = -m$ et que quelques-unes des fonctions $G_r(x)$ sont identiquement nulles ; il suffit, en effet, *que ces fonctions soient censées positives.*

8. Il résulte de tout cela que si la variable x croît de α à β, le nombre total des doubles permanences ne change pas, ou se trouve augmenté d'un nombre pair par l'annulation de termes autres que $f(x)$, et qu'il augmente de n unités dans les $n+1$ premiers termes des deux suites, lorsque la valeur de x est n fois racine de l'équation $f(x) = 0$. En conséquence, *le nombre des doubles permanences gagnées par les suites* (f) *et* (G) *dans le passage de* $x = \alpha$ *à* $x = \beta$ *est égal au nombre des racines réelles de l'équation* $f(x) = 0$, *comprises entre* α *et* β (α *étant* $< \beta$), *ou le surpasse d'un nombre pair d'unités.* C'est le théorème de M. Sylvester.

On peut, en suivant la même marche, et s'appuyant seulement sur le théorème du n° 3, démontrer le théorème de Fourier. Cette démonstration serait, si je ne me trompe, la plus simple de toutes.

On a étendu le théorème de Fourier à des équations transcendantes, en supposant que l'une $f^m(x)$ des dérivées successives ne change pas de signe dans l'intervalle dans lequel on cherche les racines. Le théorème de M. Sylvester est susceptible de la même extension.

9. En prenant un nombre positif L, et faisant $\alpha = -L$, $\beta = 0$, le théorème de M. Sylvester donnera, si L est assez grand, une limite supérieure du nombre total des racines négatives de l'équation $f(x) = 0$. On trouvera de la même manière une limite supérieure du nombre total

des racines positives, en remarquant que celles-ci sont les racines négatives de $f(-x) = 0$, et de là on déduira une limite supérieure du nombre total des racines réelles, et par conséquent une limite inférieure des racines imaginaires de l'équation $f(x) = 0$. Cette limite inférieure sera le nombre des variations de la suite (G) pour $x = 0$.

Si l'on fait $\mu = -m$, on parvient ainsi à la règle de Newton qui forme le sujet de la question 434 des *Nouvelles Annales*, 1re série, t. XVII, p. 186 (*).

ADDITION A L'ARTICLE PRÉCÉDENT,

PAR M. A. GENOCCHI.

M. Sylvester a donné un nouveau théorème dans le *Philosophical Magazine;* il n'est pas entré dans les détails de la démonstration, qu'il jugeait *nécessairement fastidieux*, et comme on les simplifie beaucoup à l'aide des considérations dont nous avons déjà fait usage, il ne sera pas hors de propos d'en exposer ici la démonstration complète. Nous la ferons précéder de celle du théorème de Fourier, parce qu'on a besoin de préciser mieux l'énoncé de ce théorème, et que, d'ailleurs, elle peut s'achever en peu de mots.

Soit l'équation $f(x) = 0$, et soit $x = a$ une valeur particulière, pour laquelle s'évanouit en changeant de signe l'une $f^r(x)$ des fonctions dérivées Les fonctions voisines $f^{r-1}(x)$ et $f^{r+1}(x)$ ne changeront pas de signe aux environs de cette valeur; si elles sont affectées de signes contraires, le groupe

$$f^{r-1}(x),\quad f^r(x),\quad f^{r+1}(x$$

(*) J'avais cite le *Calcul différentiel* d'Euler. Je ne sais par quelle méprise on a imprime au lieu de cela *Introduction au Calcul infinitésimal* présentera une variation pour $x = a - \varepsilon$, et une variation pour $x = a + \varepsilon$, le nombre ε étant positif et suffisamment petit. Si les fonctions $f^{r-1}(x)$ et $f^{r+1}(x)$ sont de même signe pour $x = a \pm \varepsilon$, ce groupe présentera deux variations pour $x = a - \varepsilon$, et deux permanences pour $x = a + \varepsilon$. Ainsi, dans le même groupe, il y aura alors deux variations perdues et deux permanences gagnées ; ce premier cas ne donne lieu ni à une perte ni à un gain.

Si la valeur $x = a$ est n fois racine de l'équation $f(x) = 0$, les $n + 1$ fonctions

$$f(x),\quad f'(x),\quad f''(x),\ldots,\quad f^{n-1}(x),\quad f^{n}(x)$$

offriront des signes alternés pour $x = a - \varepsilon$, et seront affectées du même signe pour $x = a + \varepsilon$, en sorte qu'il y aura dans ce groupe n variations perdues et n permanences gagnées.

On conclut de là immédiatement le théorème de Fourier. En effet, nommons Δ le nombre des racines réelles de l'équation $f(x) = 0$, comprises entre deux nombres donnés α et β ; nommons v le nombre de variations perdues, p le nombre de permanences gagnées dans le passage de $x = \alpha$ à $x = \beta$ ($\beta > \alpha$), par la suite

$$(f) \qquad f(x),\quad f'(x),\quad f''(x),\ldots,\quad f^{m}(x),$$

m étant le degré de l'équation ; enfin supposons qu'il arrive s fois dans le même intervalle qu'un terme de la suite (f) s'annule et change de signe entre deux termes de même signe, en ne comptant pas les cas où, avec un terme $f^{r}(x)$, s'évanouissent tous les termes précédents jusqu'à $f(x)$ inclusivement. Nous avons la formule

$$(\mathrm{A}) \qquad v = p = \Delta + 2s,$$

qui exprime le théorème de Fourier et donne en outre la signification de l'excès $2s$.

Maintenant, avec les suites (f) et (G), dont la formation est connue, formons une nouvelle suite

$$(F) \qquad F(x), \quad F_1(x), \quad F_2(x), \ldots, \quad F_m(x),$$

en posant

$$F(x) = f(x)\, G(x) \quad \text{et généralement} \quad F_r(x) = f(x)\, G_r(x):$$

les termes de la suite (F) ne pourront changer de signe que si l'une des fonctions (f) ou l'une des fonctions (G) en change elle-même. Nous pouvons distinguer plusieurs cas.

1° Soit $f^r(x)$ une des fonctions (f) qui change de signe dans le voisinage de la valeur particulière $x = a$; soient $f^{r-1}(a)$ et $f^{r+1}(a)$ différentes de zéro. Si ces deux fonctions sont de signes contraires, les autres quantités $G_{r-1}(x)$, $G_r(x)$, $G_{r+1}(x)$ seront positives pour $x = a$, et par suite aussi dans le voisinage de cette valeur. Donc le groupe

$$F_{r-1}(x), \quad F_1(x), \quad F_{r+1}(x)$$

offrira, comme le groupe correspondant des fonctions (f), une variation pour $x = a - \varepsilon$ et une variation pour $x = a + \varepsilon$.

Si les fonctions $f^{r-1}(a)$ et $f^{r+1}(a)$ sont de même signe, parmi les quantités $G_{r-1}(x)$, $G_r(x)$, $G_{r+1}(x)$, la deuxième sera négative et les deux autres seront positives pour $x = a$, et aussi pour $x = a \pm \varepsilon$: d'où l'on déduit que dans le groupe correspondant de trois fonctions (F) il y a deux permanences pour $x = a - \varepsilon$, aucune pour $x = a + \varepsilon$.

Ainsi, lorsque l'une des fonctions (f) s'évanouit entre deux autres qui ne s'évanouissent pas, si celles-ci sont de signes contraires, le groupe correspondant de trois fonctions (F) n'éprouve ni gain ni perte de variations ou permanences; si elles sont de même signe, ce groupe perd deux permanences.

2° Si pour $x = a$ s'évanouissent avec $f^r(x)$ les $n-1$ fonctions dérivées suivantes, les n quantités

$$G_{r+1}(x),\quad G_{r+2}(x)\ldots,\quad G_{r+n-1}(x),\quad G_{r+n}(x),$$

seront positives dans le voisinage de $x = a$, et par conséquent les n autres fonctions

$$F_{r+1}(x),\quad F_{r+2}(x)\ldots,\quad F_{r+n-1}(x),\quad F_{r+n}(x),$$

présenteront les mêmes signes que les fonctions (f) correspondantes; d'où il suit qu'il y aura $n-1$ variations pour $x = a - \varepsilon$, et $n-1$ permanences pour $x = a + \varepsilon$, et qu'ainsi on gagnera $n-1$ permanences.

Remarquons, de plus, que $f^{r-1}(a)$ étant supposée différente de zéro, $G_{r-1}(a)$ sera positive, et $G_r(x)$ aura dans le voisinage de $x = a$ un signe égal à celui de $-f^{r-1}(x)f^{r+1}(x)$, d'après ce que nous avons démontré dans le premier article. Donc $F_{r-1}(x)$ aura le signe de $f^{r-1}(x)$, et $F_r(x)$ aura le même signe que le produit $-f^{r-1}(x)f^r(x)f^{r+1}(x)$, c'est-à-dire un signe égal à celui de $f^{r-1}(x)$ ou $F_{r-1}(x)$ pour $x = a - \varepsilon$, et un signe contraire pour $x = a + \varepsilon$; ainsi il y aura perte d'une permanence entre $F_{r-1}(x)$ et $F_r(x)$; car $f^r(x)f^{r+1}(x)$ est < 0 pour $x = a - \varepsilon$, et > 0 pour $x = a + \varepsilon$.

Mais le nombre n peut être pair ou impair.

Dans le cas de n pair, la fonction $f^r(x)$ ne changera pas de signe; si ce signe est le même que celui de $f^{r-1}(x)$, les fonctions $f^{r-1}(x)$ et $f^{r+1}(x)$ seront de signes contraires pour $x = a - \varepsilon$, de même signe pour $x = a + \varepsilon$: par conséquent $F_r(x)$ et $F_{r+1}(x)$ présenteront toujours une variation. Si le signe de $f^r(x)$ est contraire à celui de $f^{r-1}(x)$, les signes de $f^{r-1}(x)$ et $f^{r+1}(x)$ seront égaux pour $x = a - \varepsilon$, contraires pour $x = a + \varepsilon$, et les fonctions $F_r(x)$ et $F_{r+1}(x)$ présenteront toujours une permanence. Ainsi, dans ce cas, le groupe de $n+2$ fonctions $F_{r-1}(x), \ldots, F_{r+n}(x)$ gagnera $n-2$ permanences.

Dans le cas de n impair, la fonction $f^r(x)$ changera de signe, la dérivée suivante $f^{r+1}(x)$ n'en changera pas, et si le signe de $f^{r+1}(x)$ est égal à celui de $f^{r-1}(x)$, les fonctions $F_r(x)$ et $F_{r+1}(x)$ présenteront une permanence pour $x = a - \varepsilon$, une variation pour $x = a + \varepsilon$, en sorte que le groupe de $n+2$ fonctions (F) gagnera $n-3$ permanences. Si $f^{r+1}(x)$ et $f^{r-1}(x)$ sont affectées de signes contraires, les fonctions $F_r(x)$ et $F_{r+1}(x)$ présenteront une variation pour $x = a - \varepsilon$, une permanence pour $x = a + \varepsilon$; et il y aura par suite $n-1$ permanences gagnées dans le groupe total de $n+2$ termes.

Ce groupe gagnera donc, dans l'un et l'autre cas, un nombre pair de permanences (qui pourra aussi être égal à o).

3° Si $f^r(a)$ est différente de zéro, mais que $G_r(x)$ s'évanouisse en changeant de signe pour $x = a$, les fonctions $f^{r-1}(a)$ et $f^{r+1}(a)$ seront aussi différentes de zéro et offriront le même signe; de plus, les rapports $\frac{f^r(x)}{f^{r+1}(x)}$, $\frac{G_r(x)}{G_{r+1}(x)}$ seront de signes contraires pour $x = a - \varepsilon$, de même signe pour $x = a + \varepsilon$, et par conséquent les fonctions $F_r(x)$ et $F_{r+1}(x)$ présenteront une variation pour $x = a - \varepsilon$, une permanence pour $x = a + \varepsilon$. Mais $G_{r-1}(a)$ pourra être nulle aussi : dans ce cas, on trouvera, d'une manière semblable, qu'une autre permanence est gagnée entre $F_{r-1}(x)$ et $F_r(x)$; ainsi le groupe

$$F_{r-1}(x), \quad F_r(x), \quad F_{r+1}(x)$$

gagnera deux permanences. Dans le cas contraire, si

$F_{r-1}(x)$ a le signe de $F_r(a-\varepsilon)$, ces deux fonctions offriront une permanence pour $x = a + \varepsilon$, qui sera perdue pour $x = a + \varepsilon$; si elle a le signe contraire, on gagnera une permanence; donc le nombre des permanences du même groupe ne changera pas ou sera augmenté de deux unités.

4° Enfin, si la valeur $x = a$ est n fois racine de l'équation $f(x) = 0$, le groupe de $n + 1$ termes

$$F(x),\quad F_1(x),\quad F_2(x),\ldots,\quad F_n(x)$$

gagnera n permanences, car les quantités

$$G(x),\quad G_1(x),\quad G_2(x),\ldots,\quad G_n(x),$$

étant toutes positives dans le voisinage de $x = a$, les $n + 1$ fonctions (F) offriront les mêmes signes que les fonctions (f) correspondantes.

Soient donc P le nombre des permanences acquises, V le nombre des variations perdues par la suite (F) dans le passage de $x = \alpha$ à $x = \beta$; soit s' le nombre qui exprime combien de fois un terme de la suite (f) s'évanouit dans cet intervalle entre deux termes différents de zéro et de même signe; soit S un autre nombre entier positif ou nul. On aura $V = P$, et, les autres notations étant retenues, on conclura

$$\text{(B)}\qquad V = P = \Delta - 2s' + 2S.$$

En combinant les formules (A) et (B), et faisant

$$t = s - s' + S,$$

on déduira une troisième formule qui exprime le nouveau théorème de M. Sylvester

$$\text{(C)}\qquad \frac{V+v}{2} = \frac{P+p}{2} = \Delta + t,$$

où t sera un nombre entier positif ou nul, parce que s n'est pas inférieur à s' (*).

L'illustre auteur a remarqué qu'on peut dans son premier théorème remplacer les *doubles permanences* des suites (f) et (G) par les *variations sur permanences* considérées dans les mêmes suites, ce qui pourra donner une limite plus avantageuse du nombre des racines, et qu'au lieu de ces *variations sur permanences*, on peut considérer les *doubles variations*, pourvu qu'on les compte dans les suites (f) et (F).

Il insiste sur l'importance du paramètre μ arbitraire entre certaines limites et regarde l'introduction d'un tel paramètre dans les *criteria* comme un fait nouveau dans l'histoire de l'Algèbre. J'engage le lecteur à consulter les exemples que M. Sylvester a donnés, et, dans un intérêt purement historique, je me borne à observer qu'un Mémoire d'Euler, *Nova criteria radices æquationum imaginarias dignoscendi*, renferme des règles pour la découverte des racines imaginaires dans lesquelles entre aussi un paramètre arbitraire, quoique Euler détermine ensuite ce paramètre par la condition de rendre le *criterium* le plus avantageux qu'il soit possible. (Voir *Novi Comm. Acad. Petropol.*, 1768, t. XIII, p. 116 et suiv.)

(*) Suivant l'énoncé de M. Sylvester, le nombre t exprimerait combien de fois dans l'intervalle considéré un terme de la suite (G) s'annule entre deux fonctions (F) de même signe. Cela n'est pas toujours vrai, comme on peut s'en convaincre par l'examen du cas expliqué ci-dessus au n° 2°.