NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PH. GILBERT

Sur une propriété des surfaces homofocales du second ordre et sur quelques conséquences qui en découlent

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 529-541

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__529_0>

SUR UNE PROPRIÉTÉ

Des surfaces homofocales du second ordre et sur quelques conséquences qui en découlent;

PAR M. PH. GILBERT,
Professeur à l'Université de Louvain,
Correspondant de la Société Philomathique.

On a besoin, dans la théorie des lignes géodésiques de l'ellipsoïde, d'une certaine équation en coordonnées elliptiques du cône circonscrit à une surface du second ordre. En cherchant à déduire cette équation des premiers principes de la théorie des surfaces homofocales, j'ai obtenu une formule qui y conduit d'une manière très-simple, et d'où l'on tire, en outre, diverses conséquences, qui m'ont paru devoir offrir quelque intérêt aux lecteurs de ce journal.

1. L'équation d'une surface du second ordre appartenant à un système de surfaces homofocales étant mise sous la forme

$$(1) \qquad \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1,$$

j'appelle λ le *paramètre* de cette surface. D'un point M (x, y, z), appartenant à la surface λ, je mène une tangente quelconque à une surface homofocale, à paramètre θ : M' (x', y', z') sera le point de contact. Je désigne par δ la longueur MM'; par p_λ, p_θ les distances du centre commun aux plans tangents en M et M' aux surfaces λ et θ respectivement; par (δ, λ) l'angle que fait la direction MM' avec la normale *extérieure* à la surface λ, en M; par (θ, λ) l'angle des normales extérieures aux deux surfaces en M et M'. D'après l'équation (1), les cosinus des angles que la première de ces deux normales fait avec les axes sont

$$p_\lambda \frac{x}{\lambda^2}, \quad p_\lambda \frac{y}{\lambda^2 - b^2}, \quad p_\lambda \frac{z}{\lambda^2 - c^2},$$

d'où

$$\cos(\delta, \lambda) = p_\lambda \left(\frac{x' - x}{\delta} \cdot \frac{x}{\lambda^2} + \frac{y' - y}{\delta} \cdot \frac{y}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z' - z}{\delta} \cdot \frac{z}{\lambda^2 - c^2} \right)$$
$$= \frac{p_\lambda}{\delta} \left(\frac{xx'}{\lambda^2} + \frac{yy'}{\lambda^2 - b^2} + \frac{zz'}{\lambda^2 - c^2} - 1 \right),$$

d'où l'on tire

$$\frac{xx'}{\lambda^2} + \frac{yy'}{\lambda^2 - b^2} + \frac{zz'}{\lambda^2 - c^2} - 1 = \frac{\delta \cos(\delta, \lambda)}{p_\lambda}.$$

La droite MM' étant tangente à la surface θ, on a aussi

$$\frac{xx'}{\theta^2} + \frac{yy'}{\theta^2 - b^2} + \frac{zz'}{\theta^2 - c^2} - 1 = 0,$$

et, en soustrayant cette équation de la précédente,

$$\frac{xx'}{\lambda^2 \theta^2} + \frac{yy'}{(\lambda^2 - b^2)(\theta^2 - b^2)} + \frac{zz'}{(\lambda^2 - c^2)(\theta^2 - c^2)} = \frac{\delta \cos(\delta, \lambda)}{p_\lambda (\theta^2 - \lambda^2)}.$$

Mais, d'autre part, on a visiblement

$$\cos(\theta, \lambda) = p_\lambda p_\theta \left[\frac{xx'}{\lambda^2 \theta^2} + \frac{yy'}{(\lambda^2 - b^2)(\theta^2 - b^2)} + \frac{zz'}{(\lambda^2 - c^2)(\theta^2 - c^2)} \right],$$

donc

$$\cos(\theta, \lambda) = \frac{p_\theta \delta \cos(\delta, \lambda)}{\theta^2 - \lambda^2}. \tag{2}$$

Telle est la formule que je voulais établir : elle donne l'expression du cosinus de l'angle des normales aux deux surfaces λ et θ.

1° Nous en tirons cette première conséquence, que si la droite MM′ touche en même temps la surface λ, $\cos(\delta, \lambda)$ étant nul, on a aussi $\cos(\theta, \lambda) = 0$, donc : *si deux homofocales touchent une même droite, et que par les points de contact on leur mène respectivement des plans tangents, ceux-ci se coupent à angle droit.*

2° Soient μ, ν, les paramètres de deux autres surfaces homofocales qui se coupent au point M. La formule (2) donne de même

$$(2)\quad \cos(\theta, \mu) = \frac{p_\theta\, \delta \cos(\delta, \mu)}{\theta^2 - \mu^2}, \qquad \cos(\theta, \nu) = \frac{p_\theta\, \delta \cos(\delta, \nu)}{\theta^2 - \nu^2}.$$

Mais la droite MM′ étant perpendiculaire à la normale en M′, on a

$$\cos(\delta, \theta) = 0,$$

ou

$$\cos(\delta, \lambda)\cos(\theta, \lambda) + \cos(\delta, \mu)\cos(\theta, \mu) + \cos(\delta, \nu)\cos(\theta, \nu) = 0,$$

d'où

$$\frac{\cos^2(\delta, \lambda)}{\lambda^2 - \theta^2} + \frac{\cos^2(\delta, \mu)}{\mu^2 - \theta^2} + \frac{\cos^2(\delta, \nu)}{\nu^2 - \theta^2} = 0,$$

ce qui est l'équation commune à toutes les tangentes menées du point M à la surface θ, que nous voulions trouver (Chasles, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XXII, p. 517. — Salmon, *Analytic Geometry of three dimensions*, p. 127). La démonstration précédente est beaucoup plus simple que celle que donne M. Salmon (p. 123). Cette équation, lorsqu'on y considère le point M et la droite seuls comme donnés, fournit une équation du second degré en θ^2, dont les racines, toujours réelles et positives, sont les carrés des paramètres de deux surfaces homofocales qui touchent la droite donnée, et qui jouissent de la propriété énoncée au n° 1° (*).

On sait aussi que cette équation conduit à une propriété remarquable, due à M. Chasles, des lignes géodésiques des surfaces du second ordre (Salmon, *Anal. Geom. of three dim.*, p. 315); c'est-à-dire que si l'on y considère λ comme le paramètre d'une surface tangente à la droite donnée, le paramètre θ de la seconde surface tangente à la même droite est déterminé par l'équation

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \theta^2,$$

i étant l'angle que fait la tangente avec la ligne $\mu =$ const., sur la surface λ; et comme le premier membre est constant pour tous les points d'une même ligne géodésique, tangente à la ligne de courbure de la surface λ qui a pour paramètre θ, on en conclut que :

Les tangentes à une même ligne géodésique d'une surface du second ordre λ touchent toutes une même surface homofocale θ, dont l'intersection avec la surface λ donne la ligne de courbure à laquelle cette géodésique est tangente. En d'autres termes, *le lieu de ces tangentes est une développable circonscrite à la surface homofocale θ* (Chasles, *Comptes rendus, etc.*, t. XXII, p. 69).

Tout cela est bien connu; mais voici ce qui n'a pas été peut-être remarqué : si l'on trace sur la surface λ toutes les lignes géodésiques tangentes à une même ligne de courbure C, intersection de cette surface et d'une homofocale θ, les tangentes à ces diverses lignes géodésiques seront toutes normales à une même surface Σ, d'après une proposition de M. Bertrand. Or, *les centres de courbure principaux de cette surface Σ seront tous sur*

(*) Briot, *Complément de Géométrie analytique*, p. 282.

les deux homofocales λ *et* θ, en sorte que les tangentes aux lignes géodésiques de la première λ tracent sur la surface Σ un premier système de lignes de courbure, et les tangentes aux lignes géodésiques de la seconde θ, qui touchent la même ligne de courbure C, viennent tracer sur la même surface Σ le deuxième système de lignes de courbure.

3° Revenons à nos équations (2), d'où nous tirons

$$\begin{aligned}(\theta^2-\lambda^2)\cos^2(\theta,\lambda)+(\theta^2-\mu^2)\cos^2(\theta,\mu)+(\theta^2-\nu^2)\cos^2(\theta,\nu)\\ =p_\theta\delta[\cos(\theta,\lambda)\cos(\delta,\lambda)+\ldots].\end{aligned}$$

Le second membre étant nul, comme on l'a déjà observé, l'équation se réduit, à cause de

$$\cos^2(\theta,\lambda)+\cos^2(\theta,\mu)+\cos^2(\theta,\nu)=1,$$

à celle-ci :

$$\lambda^2\cos^2(\theta,\lambda)+\mu^2\cos^2(\theta,\mu)+\nu^2\cos^2(\theta,\nu)=\theta^2,$$

qui renferme un curieux théorème de M. Chasles (*Comptes rendus*, t. XXII, p. 67) que l'on peut énoncer ainsi : *Si par un point quelconque* M *on mène un plan fixe* P, *et si l'on porte sur les normales aux trois surfaces homofocales qui se coupent en* M *des longueurs égales à leurs paramètres respectifs, la somme des carrés des projections de ces longueurs sur la normale au plan* P *est constante pour tous les points* M *du plan ; elle vaut le carré du paramètre de l'homofocale tangente à ce plan.*

4° Dans l'équation du cône circonscrit à une surface θ, que nous avons donnée plus haut, lorsqu'on suppose $\mu=\nu=b$, cette équation se réduisant à celle-ci,

$$\frac{\cos^2(\delta,\lambda)}{\lambda^2-\theta^2}+\frac{\sin^2(\delta,\lambda)}{b^2-\theta^2}=0,$$

fait voir que l'angle (δ, λ) est constant et donne cette proposition connue, que *le cône circonscrit à un ellipsoïde θ, et qui a son sommet sur l'hyperbole focale de celui-ci, est de révolution autour de la tangente à cette hyperbole.* L'équation donne

$$\cos(\delta, \lambda) = \sqrt{\frac{\lambda^2 - \theta^2}{\lambda^2 - b^2}}, \quad \sin(\delta, \lambda) = \sqrt{\frac{\theta^2 - b^2}{\lambda^2 - b^2}}.$$

Mais, d'autre part, si l'on ajoute les équations (2), après les avoir élevées au carré, on obtient

$$\frac{1}{p_\theta^2 \delta^2} = \frac{\cos^2(\delta, \lambda)}{(\lambda^2 - \theta^2)^2} + \frac{\cos^2(\delta, \mu)}{(\mu^2 - \theta^2)^2} + \frac{\cos^2(\delta, \nu)}{(\nu^2 - \theta^2)^2},$$

formule assez curieuse par elle-même, et qui devient, dans l'hypothèse $\mu = \nu = b$,

$$\frac{1}{p_\theta^2 \delta^2} = \frac{\cos^2(\delta, \lambda)}{(\lambda^2 - \theta^2)^2} + \frac{\sin^2(\delta, \lambda)}{(b^2 - \theta^2)^2},$$

d'où l'on tire, en remplaçant le sinus et le cosinus par leurs valeurs,

$$p_\theta \delta = \sqrt{(\lambda^2 - \theta^2)(\theta^2 - b^2)},$$

ce qui est une quantité constante pour toutes les génératrices du cône. Donc, *si le sommet d'un cône circonscrit à l'ellipsoïde est sur l'hyperbole focale, la distance du centre au plan tangent en un point de la courbe de contact, multipliée par la distance de ce point au sommet du cône, donne un produit constant pour tous les points de la courbe de contact.* On peut même remarquer que ce produit, divisé par $\sqrt{\lambda^2 - \theta^2}$, est indépendant de λ et égal au demi-axe moyen de l'ellipsoïde.

5° On tire encore des formules (2), en observant que l'on a

$$\cos^2(\delta, \lambda) + \cos^2(\delta, \mu) + \cos^2(\delta, \nu) = 1,$$

l'égalité

$$(\theta^2 - \lambda^2)\cos(\theta, \lambda)\cos(\delta, \lambda) + (\theta^2 - \mu^2)\cos(\theta, \mu)\cos(\delta, \mu) \\ + (\theta^2 - \nu^2)\cos(\theta, \nu)\cos(\delta, \nu) = p_\theta\,\delta,$$

qui se réduit, le coefficient de θ^2 étant nul, à

$$\lambda^2\cos(\theta, \lambda)\cos(\delta, \lambda) + \mu^2\cos(\theta, \mu)\cos(\delta, \mu) \\ + \nu^2\cos(\theta, \nu)\cos(\delta, \nu) = -p_\theta\,\delta.$$

Ainsi, *lorsque d'un point* M *de l'espace on mène une tangente à une surface du second ordre* θ, *si à partir du point* M *on porte sur les normales aux trois surfaces homofocales qui passent par ce point des longueurs égales aux paramètres respectifs de ces surfaces, la somme des projections de ces longueurs sur la tangente proposée, multipliées respectivement par leurs projections sur la normale à la surface* θ, *est égale au produit de la distance du point* M *au point de contact, par la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent à la surface* θ.

Remarquons, pour finir, que si d'un point de l'espace (λ, μ, ν), on mène une normale à une surface λ', et si l'on désigne par μ', ν' les paramètres des deux autres surfaces homofocales qui passent par le point d'incidence, on a

$$\frac{\cos^2(\lambda', \lambda)}{(\mu'^2 - \lambda^2)(\nu'^2 - \lambda^2)} + \frac{\cos^2(\lambda', \mu)}{(\mu'^2 - \mu^2)(\nu'^2 - \mu^2)} + \frac{\cos^2(\lambda', \nu)}{(\mu'^2 - \nu^2)(\nu'^2 - \nu^2)} = 0.$$

2. L'équation (2), qui nous a servi de point de départ, n'est elle-même qu'un cas particulier d'une expression plus générale, qui se rapporte à l'angle compris entre les normales à deux surfaces homofocales en deux points donnés quelconques.

Soient donc M, M', deux points quelconques ; λ, θ, les paramètres de deux surfaces homofocales passant respectivement par ces points ; conservons d'ailleurs les mêmes notations que dans le premier cas. Nous aurons d'abord, comme on l'a vu,

$$\frac{xx'}{\lambda^2} + \frac{yy'}{\lambda^2 - b^2} + \frac{zz'}{\lambda^2 - c^2} - 1 = \frac{\delta \cos(\delta, \lambda)}{p_\lambda},$$

et, par la même raison,

$$\frac{xx'}{\theta^2} + \frac{yy'}{\theta^2 - b^2} + \frac{zz'}{\theta^2 - c^2} - 1 = \frac{\delta \cos(\delta, \theta)}{p_\theta};$$

soustrayant membre à membre et substituant encore dans l'expression de $\cos(\theta, \lambda)$, nous avons l'égalité remarquable

$$(3) \quad \cos(\theta, \lambda) = \frac{\delta}{\theta^2 - \lambda^2}\left[p_\theta \cos(\delta, \lambda) - p_\lambda \cos(\delta, \theta)\right].$$

Cette formule peut conduire à de nombreuses conséquences, dont voici quelques-unes : on voit tout d'abord que si δ est nul, $\cos(\theta, \lambda)$ s'évanouit : donc deux surfaces homofocales se coupent toujours à angle droit.

1° On peut supposer que les points M et M' soient sur une même surface du second ordre, ce qui revient à faire θ égal à λ dans l'équation ; on a alors

$$p_\theta \cos(\delta, \lambda) - p_\lambda \cos(\delta, \theta) = 0,$$

ou

$$\frac{p_\lambda}{\cos(\delta, \lambda)} = \frac{p_\theta}{\cos(\delta, \theta)};$$

et comme le premier nombre représente la distance du point M au point où la sécante MM' rencontre un plan perpendiculaire à la normale en M mené par le centre, on a ce théorème :

Si l'on mène à une surface du second ordre une sécante quelconque MM', *et par le centre de la surface* *des plans parallèles aux plans tangents en* M *et en* M′, *ces plans coupent la sécante à des distances égales et de sens contraire des points de contact respectifs* M *et* M′.

Et, comme cas particulier : *Si l'on mène à une conique une sécante quelconque* MM′, *et par le centre de la courbe des parallèles aux tangentes en* M *et en* M′, *ces parallèles coupent la sécante à des distances égales et de sens contraire des points de contact respectifs* M *et* M′.

2° L'équation précédente entre p_λ et p_θ subsiste, si l'on suppose, non plus $\theta = \lambda$, mais $\cos(\theta, \lambda) = 0$. On a donc ce théorème :

Étant pris respectivement sur deux surfaces homofocales deux points M *et* M′, *tels que les normales correspondantes se coupent à angle droit, les deux plans menés par le centre commun des deux surfaces parallèlement aux plans tangents en* M *et en* M′, *déterminent sur la sécante* MM′, *à partir des points de contact respectifs* M *et* M′, *des segments égaux et de sens contraire.*

On a pour les coniques homofocales un théorème absolument analogue, qu'il est inutile d'énoncer.

3° L'équation (3) peut aussi s'écrire sous la forme

$$\theta^2 - \lambda^2 = p_\theta \frac{\delta \cos(\delta, \lambda)}{\cos(\theta, \lambda)} - p_\lambda \frac{\delta \cos(\delta, \theta)}{\cos(\theta, \lambda)},$$

qui renferme un théorème très-général. On voit en effet avec un peu d'attention que

$$\frac{\delta \cos(\delta, \theta)}{\cos(\theta, \lambda)}$$

représente la portion de la normale en M à la surface λ comprise entre ce point et le point où elle perce le plan tangent en M' à la surface θ, cette longueur étant affectée du signe $+$ ou du signe $-$, suivant qu'elle tombe sur la normale *intérieure* ou *extérieure :* désignons-la par ϖ_λ, et soit de même ϖ_θ la distance du point M' au point où la normale en M' perce le plan tangent à la surface λ en M, la convention de signe étant la même. L'équation devient

$$(4) \qquad \theta^2 - \lambda^2 = p_\theta \varpi_\theta - p_\lambda \varpi_\lambda,$$

d'où ce théorème : *Étant données deux surfaces homofocales du second ordre, si en deux points quelconques* M *et* M', *pris respectivement sur ces surfaces, on leur mène des normales, les produits des segments compris sur ces normales entre les deux plans tangents en* M *et en* M', *par les perpendiculaires abaissées du centre respectivement sur ces plans tangents, diffèrent d'une quantité constante, égale à la différence des carrés des paramètres des deux surfaces homofocales*. Il faut, bien entendu, tenir compte, dans cet énoncé, des signes dont les segments sont affectés.

On a évidemment un théorème parfaitement analogue pour deux coniques homofocales.

Si les plans tangents en M et en M' sont parallèles, les segments ϖ_λ et ϖ_θ sont évidemment égaux et de signes contraires, et l'on a

$$\varpi_\lambda = -\varpi_\theta = p_\lambda - p_\theta,$$

d'où

$$\theta^2 - \lambda^2 = p_\theta^2 - p_\lambda^2;$$

c'est le théorème de M. Chasles : *La différence des carrés des distances du centre à deux plans parallèles, respectivement tangents à deux surfaces homofocales, est constante et égale à la différence des carrés des* *paramètres de ces surfaces* (*Aperçu historique*, note XXXI, p. 393).

Si $\lambda = \theta$, c'est-à-dire si les points M et M' sont pris sur une même surface, le second membre de l'équation (4) s'évanouit; donc : *Si l'on mène des normales en deux points* M *et* M' *d'une surface du second ordre, les produits des segments compris sur ces normales entre les deux plans tangents en* M *et en* M', *par les distances respectives du centre à ces deux plans tangents, sont égaux entre eux*. Propriété analogue pour les coniques.

Enfin, si la droite qui joint les points M et M' est, par exemple, tangente à la surface θ, on a visiblement

$$\varpi_\lambda = 0, \quad \text{d'où} \quad \theta^2 - \lambda^2 = p_\theta \varpi_\theta,$$

d'où cette propriété des surfaces homofocales : *Étant données deux surfaces homofocales, si d'un point quelconque* M *de l'une d'elles on mène une tangente à l'autre en un point quelconque* M', *la distance du centre au plan tangent en* M', *multipliée par la portion de la normale en ce point comprise entre les deux plans tangents en* M *et en* M', *donne un produit constant, égal à la différence des carrés des paramètres des deux surfaces*.

On a encore un théorème correspondant pour deux coniques homofocales.

4° La formule (4) conduit encore d'une manière si simple à diverses relations entre les rayons de courbure principaux des surfaces homofocales, que je ne puis m'empêcher d'en indiquer quelques-unes. Considérons trois homofocales λ, μ, ν, qui se coupent en un point M, suivant des lignes de courbure, comme on sait. Soit, sur l'intersection des surfaces λ et ν, un point M' infiniment voisin du point M, et appliquons l'équation (4) aux deux surfaces μ et λ passant respectivement par les points M et M′. Nous aurons

$$\lambda^2 - \mu^2 = p_\lambda \varpi_\lambda - p_\mu \varpi_\mu.$$

Mais, à la limite, ϖ_μ se réduit à zéro; ϖ_λ, comme on le voit facilement, devient le rayon de courbure de la surface λ suivant la direction MM′ qui est normale à la surface μ : nous désignerons ce rayon par L_μ, en lui attribuant le signe $+$ ou le signe $-$, suivant qu'il est dirigé suivant la normale intérieure ou extérieure à la surface λ, et nous aurons

$$\lambda^2 - \mu^2 = p_\lambda L_\mu,$$

d'où l'on voit que le produit $p_\lambda L_\mu$ est constant le long de la ligne de courbure qui résulte de l'intersection des surfaces λ et μ.

Si l'on prenait le point M′ sur l'intersection des surfaces μ et ν, on trouverait de même

$$\lambda^2 - \mu^2 = -p_\mu M_\lambda,$$

M_λ étant le rayon de la surface μ en M, suivant la direction normale à la surface λ.

Enfin, on trouve de même, en prenant le point M′ sur l'intersection des surfaces λ et μ,

$$\lambda^2 - \mu^2 = p_\lambda L_\nu - p_\mu M_\nu.$$

Si l'on combine les deux premières égalités, on obtient

$$\frac{L_\mu}{M_\lambda} = -\frac{p_\mu}{p_\lambda},$$

ce qui peut se traduire ainsi : *Les courbures principales de deux surfaces homofocales en un point de leur intersection, suivant les directions qui leur sont réciproquement normales, sont entre elles comme les distances* *du centre aux plans tangents respectifs de ces deux surfaces.*

En combinant la première et la troisième, il vient

$$p_\lambda(\mathbf{L}_\nu - \mathbf{L}_\mu) = p_\mu \mathbf{M}_\nu,$$

d'où

$$\frac{\mathbf{L}_\nu - \mathbf{L}_\mu}{\mathbf{M}_\nu} = \frac{p_\mu}{p_\lambda} = -\frac{\mathbf{L}_\mu}{\mathbf{M}_\lambda},$$

d'où enfin

$$\frac{\mathbf{L}_\nu}{\mathbf{L}_\mu} + \frac{\mathbf{M}_\nu}{\mathbf{M}_\lambda} = 1,$$

c'est-à-dire que, *en un point commun à deux surfaces homofocales, les rayons de courbure de ces surfaces suivant la direction de leur intersection, divisés respectivement par les rayons de courbure de ces mêmes surfaces suivant les directions qui leur sont réciproquement normales, donnent une somme constante et égale à l'unité.*