Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 6 (1867), p. 497-518

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__497_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 93 (*);

PAR M. FOURET,
Officier du Génie.

Soient A, B, C *les longueurs de trois cordes issues d'un même point d'une circonférence de cercle;* B *étant la corde intermédiaire, on a, comme il est facile de s'en assurer,*

$$(\alpha)\qquad A\sin\widehat{BC} + C\sin\widehat{AB} = B\sin\widehat{AC}.$$

Et, sur la surface de la sphère, A, B *et* C *représentant trois arcs de grand cercle issus du même point d'un*

(*) Cette question énoncée (1re série, t. IV, p. 259) a été rappelée (2e série, t. II, p. 225) comme question non résolue.

petit cercle et terminés à leur seconde rencontre avec ce même petit cercle, on a une relation qui ne diffère de la précédente qu'en ce que les longueurs A, B, C *sont remplacées par* $\tang\frac{1}{2}A$, $\tang\frac{1}{2}B$, $\tang\frac{1}{2}C$.

On demande s'il y a une relation analogue à la relation (α), pour quatre cordes de la sphère qui seraient issues d'un même point de la surface.

1. La relation (α) n'est qu'une transformation très-simple du théorème de Ptolémée sur le quadrilatère inscrit dans un cercle.

En effet, soient a, b, c les extrémités de trois cordes A, B, C issues d'un même point o d'une circonférence ; le quadrilatère $oabc$ étant inscrit dans un cercle, on a, d'après ce théorème,

$$oa \times bc + oc \times ab = ob \times ac.$$

Or, en désignant par R le rayon de la circonférence, on a

$$bc = 2R\sin\widehat{BC}, \quad ab = 2R\sin\widehat{AB}, \quad ac = 2R\sin\widehat{AC},$$

et, en substituant à bc, ab, ac ces valeurs dans la relation précédente, et supprimant $2R$ qui est facteur commun aux deux membres, on obtient la relation

$$A\sin\widehat{BC} + C\sin\widehat{AB} = B\sin\widehat{AC},$$

qui est précisément la relation (α).

2. Pour arriver à une relation analogue à la précédente, entre quatre cordes d'une sphère ayant une extrémité commune, nous nous sommes laissé guider par les considérations suivantes, qui peuvent trouver leur application dans la plupart des questions semblables à celle qui nous occupe en ce moment.

A une propriété d'une figure plane correspondent généralement plusieurs propriétés analogues dans l'espace, suivant le point de vue auquel on se place ; et cependant cette généralisation, malgré le grand nombre de solutions dont elle est susceptible, est soumise à une double difficulté, qui consiste premièrement à former l'énoncé de la propriété nouvelle, analogue à la propriété connue dont on s'occupe ; secondement, à vérifier l'exactitude de cet énoncé. De ces deux difficultés, la seconde étant généralement la plus grande, c'est celle-ci qu'il faut éliminer, ou du moins diminuer autant que possible. On y parvient, dans le cas qui nous occupe, en faisant subir à la propriété connue une série de transformations qui la ramène à une propriété évidente. On voit alors facilement de quelle manière on peut généraliser l'énoncé de cette dernière, sans qu'elle cesse d'être évidente; et en lui faisant subir la série des transformations précédemment effectuées, mais en sens inverse, on arrive à une généralisation de la propriété première.

3. Avant de faire subir à la relation (α) la série des transformations dont nous venons de parler, nous l'écrirons sous la forme suivante qui offre plus de symétrie :

$$(\alpha') \qquad A \sin \widehat{BC} + B \sin \widehat{CA} + C \sin \widehat{AB} = 0,$$

chacun des angles ayant un sens, et, par suite, un signe déterminé par l'ordre des lettres qui figurent ses côtés.

Cela posé, transformons par rayons vecteurs réciproques, en prenant le point o pour pôle, et un paramètre de transformation quelconque.

La circonférence se transforme en une droite sur laquelle se trouvent les points a', b', c', correspondant aux points a, b, c; et k désignant le paramètre de transformation, on a

$$oa = \frac{k}{oa'}, \quad ob = \frac{k}{ob'}, \quad oc = \frac{k}{oc'};$$

et, en substituant ces expressions de A, B, C dans la relation (α'), on obtient

$$\frac{1}{oa'} \sin \widehat{BC} + \frac{1}{ob'} \sin \widehat{CA} + \frac{1}{oc'} \sin \widehat{AB} = 0,$$

ou, en chassant les dénominateurs,

$$ob' \times oc' \sin \widehat{BC} + oc' \times oa' \sin \widehat{CA} + oa' \times ob' \sin \widehat{AB} = 0;$$

ou bien encore, en remarquant que chacun des termes de cette égalité exprime le double de l'aire d'un certain triangle,

$$\text{trg.}\, b'oc' + \text{trg.}\, c'oa' + \text{trg.}\, a'ob' = 0.$$

Ces trois triangles, qui ont un sommet o commun, ont les mêmes signes que leurs angles en o; et comme ils ont une hauteur commune, on peut supprimer cette hauteur dans la dernière égalité qui devient

$$b'c' + c'a' + a'b' = 0,$$

relation évidente de laquelle on pourrait remonter à la relation (α).

4. Cette relation entre les segments formés par trois points en ligne droite conduit à une relation analogue et presque aussi évidente, qui a lieu entre les triangles déterminés par quatre points d'un même plan.

Quatre points d'un même plan, pris trois à trois, donnent lieu à quatre triangles. *La somme des aires de ces quatre triangles est toujours nulle*, c'est-à-dire que a', b', c', d' désignant les quatre points, on a

$$\text{trg.}\, b'c'd' + \text{trg.}\, c'd'a' + \text{trg.}\, d'a'b' + \text{trg.}\, a'b'c' = 0.$$

Pour déterminer le signe de chaque triangle, il faut considérer comme fixe le sommet désigné par la première lettre, et voir dans quel sens il faut faire tourner le côté qui aboutit au second sommet, pour l'appliquer sur le côté qui aboutit au troisième. En observant cette convention relative aux signes, on vérifie aisément la relation d'identité qui a lieu entre les quatre triangles, et que nous allons transformer. Pour cela, prenons un point o quelconque en dehors du plan, et formons quatre tétraèdres ayant pour sommet commun ce point o, et pour bases les quatre triangles; la somme des volumes des quatre tétraèdres ainsi obtenus est nulle :

$$\text{tétr.}\,ob'c'd' + \text{tétr.}\,oc'd'a' + \text{tétr.}\,od'a'b' + \text{tétr.}\,oa'b'c' = 0,$$

les signes de ces tétraèdres se déterminant d'après ceux des triangles qui forment leurs bases.

Les volumes de ces tétraèdres peuvent s'exprimer en fonction de leurs angles solides en o, et des longueurs des arêtes qui aboutissent à ce point; en prenant six fois ces volumes, on a

$$ob' \times oc' \times od' \sin\widehat{\mathrm{BCD}} + oc' \times od' \times oa' \sin\widehat{\mathrm{CDA}}$$
$$+ od' \times oa' \times ob' \sin\widehat{\mathrm{DAB}} + oa' \times ob' \times oc' \sin\widehat{\mathrm{ABC}} = 0$$

Les signes des sinus se déterminent d'après une règle analogue à celle que nous avons formulée pour les triangles correspondants.

La dernière relation peut s'écrire

$$\frac{1}{oa'}\sin\widehat{\mathrm{BCD}} + \frac{1}{ob'}\sin\widehat{\mathrm{CDA}} + \frac{1}{oc'}\sin\widehat{\mathrm{DAB}} + \frac{1}{od'}\sin\widehat{\mathrm{ABC}} = 0.$$

Enfin, en transformant la figure par rayons vecteurs réciproques et prenant le point o pour pôle et un paramètre de transformation quelconque, le plan devient une sphère passant par le point o; les points a', b', c', d' donnent des points a, b, c, d, extrémités de quatre cordes issues du point o, et en désignant leurs longueurs par A, B, C, D, on a la relation

$$(\beta)\quad \mathrm{A}\sin\widehat{\mathrm{BCD}}+\mathrm{B}\sin\widehat{\mathrm{CDA}}+\mathrm{C}\sin\widehat{\mathrm{DAB}}+\mathrm{D}\sin\widehat{\mathrm{ABC}}=0,$$

tout à fait analogue à la relation (α).

5. La relation (α), qui n'est, d'ailleurs, comme nous l'avons vu en commençant, qu'une manière d'écrire le théorème de Ptolémée, détermine un point quelconque d'une circonférence dont on donne trois points; cette relation a donc la même importance que l'équation du cercle en coordonnées rectilignes ou polaires; cette dernière équation n'en est d'ailleurs qu'un cas particulier, lorsqu'on prend pour pôle un point du cercle; c'est ce qu'il est facile de voir en supposant les droites oa, ob rectangulaires, et prenant l'une d'elles pour axe polaire.

Les mêmes observations s'appliquent à la relation (β) qui peut être considérée comme l'extension à l'espace du théorème de Ptolémée. Cette relation (β) peut aussi être considérée comme une généralisation de l'équation polaire de la sphère, l'un de ses points étant pris pour pôle. On déduit cette équation de la relation (β), en supposant oa, ob, oc rectangulaires, et se rappelant que *le sinus d'un angle trièdre est égal au produit du sinus de l'angle d'une des faces par le sinus de l'inclinaison de l'arête opposée sur cette face.*

Les relations (α) et (β) sont susceptibles d'un assez grand nombre de conséquences intéressantes sur lesquelles nous pourrons revenir dans une autre occasion; on peut aussi les généraliser au moyen de la transformation par rayons vecteurs réciproques. Pour le moment nous nous contenterons de déduire de la relation (α) la relation analogue en géométrie sphérique.

6. Considérons sur une sphère un petit cercle, et sur ce cercle un point o d'où sont issus trois arcs de grand cercle oa, ob, oc, terminés à la circonférence en question. Prenons le point r diamétralement opposé au point o, comme centre d'une projection stéréographique faite, bien entendu, sur le plan diamétral perpendiculaire à or. Les trois arcs de grand cercle prolongés passent par le point r, et, par suite, ils deviennent en projection trois droites $o'a'$, $o'b'$, $o'c'$, issues d'un même point o', qui n'est autre que le centre de la sphère. D'ailleurs, le petit cercle de la sphère se projette suivant un cercle passant par les points o', a', b', c'. On obtient donc en projection une figure à laquelle s'applique la relation (α). Or, l'angle de deux quelconques des arcs de grand cercle oa, ob, oc est égal à l'angle des droites correspondantes $o'a'$, $o'b'$, $o'c'$; d'un autre côté, les triangles rectangles $a'o'r$, $b'o'r$, $c'o'r$ donnent

$$o'a' = o'r \operatorname{tang} o'ra'$$

$$o'b' = o'r \operatorname{tang} o'rb'$$

$$o'c' = o'r \operatorname{tang} o'rc'\ ;$$

ou, en nommant A, B, C les angles mesurés par les arcs des grands cercles oa, ob, oc, et r le rayon de la sphère,

$$o'a' = r \operatorname{tang} \frac{1}{2} \text{A},$$

$$o'b' = r \operatorname{tang} \frac{1}{2} \text{B},$$

$$o'c' = r \operatorname{tang} \frac{1}{2} \text{C}.$$

En substituant dans la relation (α) et remarquant que

r disparaît, on obtient la relation

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}A\sin\widehat{BC}+\operatorname{tang}\frac{1}{2}C\sin\widehat{AB}=\operatorname{tang}\frac{1}{2}B\sin\widehat{AC},$$

qu'on peut aussi écrire, en ayant égard aux signes des sinus,

$$(7)\quad \operatorname{tang}\frac{1}{2}A\sin\widehat{BC}+\operatorname{tang}\frac{1}{2}B\sin\widehat{CA}+\operatorname{tang}\frac{1}{2}C\sin\widehat{AB}=0.$$

Remarque. — Il est évident que de cette dernière relation on peut déduire l'équation d'un cercle en coordonnées sphériques (longitude et latitude).

Question 559

(voir 1re série, t. XX, p. 55),

PAR M. A. LEPAGE,
Élève du lycée Bonaparte (classe de M. Ventéjol).

On donne un cylindre droit; une hélice tracée sur ce cylindre; et une sphère inscrite. Une droite horizontale se meut en s'appuyant sur l'hélice, et reste tangente à la sphère inscrite : étudier la surface engendrée par la droite. (DEWULF.)

Je prends pour axe des z l'axe du cylindre, et pour axes des x et des y deux droites rectangulaires menées par le centre O de la sphère, dans le plan perpendiculaire à l'axe du cylindre.

Je définirai l'hélice par les équations simultanées du cylindre, et de l'héliçoïde engendré par une droite horizontale s'appuyant à la fois sur l'axe du cylindre et sur l'hélice donnée.

Soient h le pas de l'hélice, r le rayon de la sphère, θ un angle variable compté à partir de OX : la génératrice rectiligne de l'héliçoïde aura pour équations

$$\frac{y}{x} = \text{tang}\,\theta; \qquad z = \frac{h.\theta}{2\pi}\,(*).$$

Éliminant θ, j'ai

$$\frac{y}{x} = \text{tang}\left(\frac{2\pi z}{h}\right);$$

de sorte que l'hélice sera représentée par le système

$$(1) \qquad \frac{y}{x} = \text{tang}\left(\frac{2\pi z}{h}\right),$$

$$(2) \qquad x^2 + y^2 = r^2.$$

Une génératrice rectiligne quelconque de la surface cherchée aura pour équations

$$(3) \qquad y = mx + n,$$

$$(4) \qquad z = k.$$

Exprimons d'abord que cette génératrice s'appuie sur l'hélice. Pour cela éliminons x, y, z entre les équations (1), (2), (3), (4).

Les relations (1), (3), (4) donnent

$$x = \frac{n}{\text{tang}\left(\frac{2k\pi}{h}\right) - m}, \qquad y = \frac{n.\text{tang}\left(\frac{2k\pi}{h}\right)}{\text{tang}\left(\frac{2k\pi}{h}\right) - m},$$

(*) On suppose ici que l'axe des x est dirigé suivant la droite menée du centre O de la sphère au point A où l'hélice donnée est rencontrée par le plan perpendiculaire à l'axe du cylindre et passant par le centre de la sphère. L'angle θ est compté, à partir de OA, dans le sens indiqué par l'arc d'hélice qui, à partir du point A, s'élève au-dessus du plan horizontal XOY. La direction de la droite OA est celle des abscisses positives. La valeur de y est positive du côté du plan ZOX où se trouve l'arc d'hélice, qui, partant de A, est au-dessus du plan XOY. Enfin, la valeur de z est positive ou négative selon qu'elle se rapporte à un point situé au-dessus ou au-dessous du plan XOY. G.

d'où, en substituant dans l'équation (2),

$$n = \pm r\left[\sin\left(\frac{2k\pi}{h}\right) - m.\cos\left(\frac{2k\pi}{h}\right)\right].$$

Prenons d'abord le signe +, nous aurons pour la condition cherchée

$$(5) \qquad n = r\left[\sin\left(\frac{2k\pi}{h}\right) - m.\cos\left(\frac{2k\pi}{h}\right)\right].$$

Maintenant, exprimons que la génératrice est tangente à la sphère, ou, ce qui revient au même, à la section déterminée dans la sphère par le plan $z = k$. Cette section sera projetée sur le plan des (xy), suivant la circonférence

$$x^2 + y^2 = r^2 - k^2,$$

et pour que cette dernière courbe soit tangente à la droite $y = mx + n$, il faut qu'on ait

$$(6) \qquad (r^2 - k^2)(m^2 + 1) = n^2.$$

L'équation de la surface cherchée s'obtiendra donc en éliminant les paramètres variables m, n, k entre les équations (3), (4), (5), (6). Les trois premières donnent

$$m = \frac{y - r\sin\left(\frac{2\pi z}{h}\right)}{x - r\sin\left(\frac{2\pi z}{h}\right)},$$

$$n = r\,\frac{x\sin\left(\frac{2\pi z}{h}\right) - y\cos\left(\frac{2\pi z}{h}\right)}{x - r\sin\left(\frac{2\pi z}{h}\right)}.$$

En substituant dans l'équation (6) et remplaçant

k par z, on a

$$(r^2 - z^2)\left\{\left[\frac{y - r\sin\left(\frac{2\pi z}{h}\right)}{x - r\cos\left(\frac{2\pi z}{h}\right)}\right]^2 + 1\right\}$$

$$= \frac{r^2\left[x\sin\left(\frac{2\pi z}{h}\right) - y\cos\left(\frac{2\pi z}{h}\right)\right]^2}{\left[x - r\cos\left(\frac{2\pi z}{h}\right)\right]^2},$$

ou

$$(7)\left\{\begin{aligned}&(r^2 - z^2)\left[x^2 + y^2 + r^2 - 2r\left(y\sin\frac{2\pi z}{h} + x\cos\frac{2\pi z}{h}\right)\right]\\ &\quad = r^2\left(x\sin\frac{2\pi z}{h} - y\cos\frac{2\pi z}{h}\right)^2,\end{aligned}\right.$$

ce qui est l'équation de la surface cherchée.

En prenant la seconde valeur de n, on aurait

$$(8)\left\{\begin{aligned}&(r^2 - z^2)\left[x^2 + y^2 + r^2 + 2r\left(y\sin\frac{2\pi z}{h} + x\cos\frac{2\pi z}{h}\right)\right]\\ &\quad = r^2\left(x\sin\frac{2\pi z}{h} - y\cos\frac{2\pi z}{h}\right)^2.\end{aligned}\right.$$

Il est facile de voir ce que signifie cette double solution. Les équations simultanées (1) et (2) représentent, outre l'hélice donnée, celle qui lui est symétrique par rapport à l'axe du cylindre, et qui résulte de l'intersection de la surface cylindrique et de l'héliçoïde. Mais l'équation (7) convient seule ici. Car, en posant $z = 0$, l'équation (7) donne la droite double $(x - r)^2 = 0$, et pour la même substitution $z = 0$, faite dans l'équation $z = \frac{h\theta}{2\pi}$, on a $\theta = 0$. Ce qui montre que la trace de l'hélice considérée sur le plan XOY est l'extrémité A du rayon OA qui a été pris pour axe des x. Les deux tangentes horizontales menées de ce point à la sphère se confondent avec la droite $x = r$.

En faisant $z = 0$ dans l'équation (8), il vient

$$(x + r)^2 = 0, \quad x = -r,$$

abscisse correspondante au point diamétralement opposé à A.

La résolution de l'équation (7) par rapport à y donne

$$(9)\quad y = \frac{-r\sin\frac{2\pi z}{h}\left(rx\cos\frac{2\pi z}{h} - r^2 + z^2\right) \pm \left(x - r\cos\frac{2\pi z}{h}\right) z\sqrt{r^2 - z^2}}{r^2\sin^2\left(\frac{2\pi z}{h}\right) - z^2};$$

ces valeurs de y montrent qu'une section de la surface par un plan parallèle au plan des xy se compose de deux droites, réelles ou imaginaires, et qui peuvent coïncider. Ces droites sont réelles et distinctes pour les valeurs de z comprises entre $+r$ et $-r$, et autres que zéro. Elles coïncident quand $z = 0$, ou $= \pm r$, et deviennent imaginaires lorsque z^2 surpasse r^2.

On peut encore se proposer de déterminer la ligne de contact de la sphère et des génératrices horizontales de la surface considérée.

Cette ligne est définie par les équations simultanées de la sphère et du lieu de la polaire d'un point quelconque de l'hélice, par rapport au cercle déterminé dans la sphère par un plan horizontal $z = k$, contenant le point pris sur l'hélice.

Les équations de la polaire sont

$$(10)\qquad xx' + yy' = r^2 - k^2,$$

$$(11)\qquad z = k;$$

le point (x', y', k) appartenant à l'hélice, on a

$$(12)\qquad y' = x' \operatorname{tang} \frac{2k\pi}{h},$$

$$(13)\qquad x'^2 + y'^2 = r^2;$$

l'élimination de x', y', k déterminera l'équation du lieu de la polaire.

En résolvant les équations (10) et (12) par rapport à x', y', il vient

$$x' = \frac{r^2 - k^2}{x + y \operatorname{tang}\left(\frac{2k\pi}{h}\right)}, \qquad y' = \frac{(r^2 - k^2)\operatorname{tang}\left(\frac{2k\pi}{h}\right)}{x + y \operatorname{tang}\left(\frac{2k\pi}{h}\right)};$$

et la substitution de ces valeurs de x', y' dans

$$x'^2 + y'^2 = r^2$$

donne

$$\frac{(r^2 - k^2)}{x \cos\left(\frac{2k\pi}{h}\right) + y \sin\left(\frac{2k\pi}{h}\right)} = \pm r,$$

ou, en prenant le signe + qui convient seul ici,

$$\frac{r^2 - k^2}{x \cos\left(\frac{2k\pi}{h}\right) + y \sin\left(\frac{2k\pi}{h}\right)} = + r.$$

$k = z$; donc l'équation du lieu de la polaire est

$$\frac{r^2 - z^2}{x \cos\left(\frac{2\pi z}{h}\right) + y \sin\left(\frac{2\pi z}{h}\right)} = r;$$

et, par conséquent, la ligne de contact cherchée est représentée par le système

$$\frac{r^2 - z^2}{x \cos\left(\frac{2\pi z}{h}\right) + y \sin\left(\frac{2\pi z}{h}\right)} = r,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

La surface proposée peut alors être engendrée par une droite horizontale s'appuyant sur cette ligne de contact et sur l'hélice.

Question 752

(voir 2^{e} série, t. V, p. 95);

PAR MM. JULES LEFEBVRE ET ALCIDE MINISCLOUX,
Élèves en Mathematiques spéciales au lycee de Lille
(classe de M. Diguet).

On circonscrit à un triangle quelconque une courbe du second degré telle, que les normales aux trois sommets du triangle passent par un même point. On demande de prouver que le lieu de ce point est une courbe à centre du troisième ordre. Déterminer cette courbe.

Lieu du pied de la quatrième normale (*).

Soient ABC le triangle proposé, et Σ une conique circonscrite à ce triangle et telle, que les normales à cette conique en A, B, C concourent en un même point P.

Nous prenons pour axes de coordonnées le côté AC du triangle et la perpendiculaire BO abaissée sur ce côté du sommet B qui lui est opposé.

Le pied M de la quatrième normale menée du point P à la courbe Σ se trouve, comme on sait, sur une hyperbole équilatère H circonscrite au triangle ABC, et dont les asymptotes sont parallèles aux axes de symétrie de la conique Σ.

Soient D, E les seconds points d'intersection de l'axe des y, OB, et des courbes H, Σ; et $-\frac{1}{p}$, $-\frac{1}{p'}$ les abscisses OA, OC des points A, C; $-\frac{1}{q}$, $-\frac{1}{6}$, $-\frac{1}{q'}$, les

(*) Les deux premières parties de la question 752 ont dejà éte résolues (t. IV, p. 420); quant au moyen de trouver le lieu du pied de la quatrième normale, il a seulement été indiquc, et le degre de l'equation de ce lieu n'a pas ete déterminé d'une manière precise; c'est à cette dernière partie de la question que se rapporte le calcul de MM. Lefebvre et Miniscloux.

ordonnées des points B, D, E; et B et λ des paramètres variables; les équations des courbes Σ et H seront

(1) $pp'x^2 + Bxy + qq'y^2 + (p+p')x + (q+q')y + 1 = 0$, ($\Sigma$),

(2) $pp'x^2 + \lambda xy + q\beta y^2 + (p+p')x + (q+\beta)y + 1 = 0$, (H),

ou

$$(3) \qquad Bxy + q'Y + X = 0,$$

$$(4) \qquad \lambda xy + \beta\ Y + X = 0,$$

en posant

$$(5) \qquad pp'x^2 + (p+p')x + qy + 1 = X,$$

$$(6) \qquad y(qy+1) = Y.$$

L'équation qui détermine les coefficients angulaires des axes de la conique Σ est

$$(7) \qquad Bn^2 + 2(pp' - qq')n - B = 0,$$

et les directions des asymptotes de l'hyperbole H sont données par l'équation

$$(8) \qquad q\beta n^2 + \lambda n + pp' = 0.$$

Ces deux équations doivent avoir les mêmes racines; donc

$$\frac{pp'}{q\beta} = -1, \quad \text{ou} \quad q\beta + pp' = 0$$

et

$$\frac{2(pp' - qq')}{\lambda} = \frac{-B}{pp'},$$

d'où l'on tire

$$\beta = -\frac{pp'}{q}, \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{2pp'(qq' - pp')}{B}.$$

En remplaçant β et λ par ces valeurs, l'équation (4) devient

$$B(qX - pp'Y) + (2q^2pp'xy)q' - 2qp^2p'^2xy = 0;$$

d'ailleurs la relation (3) peut s'écrire

$$Bxy + Yq' + X = 0.$$

Ces deux équations du premier degré en B et q' donnent

$$(9)\left\{\begin{aligned}\frac{B}{2pp'q\,(qX+pp'Y)\,xy} &= \frac{q'}{X(pp'Y-qX)-2qp^2p'^2x^2y^2}\\ &= \frac{1}{Y(qX-pp'Y)-2q^2pp'x^2y^2}.\end{aligned}\right.$$

Exprimons maintenant que les trois normales à la conique Σ, aux sommets A, B, C du triangle, se coupent au même point.

L'équation de la normale en un point quelconque (x, y) de Σ est, en nommant X', Y' les coordonnées courantes,

$$\frac{Y'-y}{X'-x} = \frac{Bx+2qq'y+q+q'}{2pp'x+By+p+p'}.$$

Aux sommets A, B, C, on a

$$\left(y=0,\quad x=-\frac{1}{p}\right),$$

$$\left(y=-\frac{1}{q},\quad x=0\right),$$

$$\left(y=0,\quad x=-\frac{1}{p'}\right),$$

et les équations des normales en ces points sont

$$(pX'+1)[-B+p(q+q')]+p^2Y'(p'-p)=0,$$
$$q^2X'(q-q')+(qY'+1)[B-q(p+p')]=0,$$
$$(p'X'+1)[-B+p'(q+q')]+p'^2Y'(p-p')=0.$$

Pour que ces trois normales concourent au même point, il faut que les deux paramètres variables B et q' satisfassent à la condition

$$(10)\quad \begin{vmatrix} p\,[B-p\,(q+q')], & p^2\,(p'-p\,), & B-p\,(q+q') \\ p'[B-p'(q+q')], & p'^2(p-p'), & B-p'(q+q') \\ q^2(q'-q\,), & q[B-q\,(p+p')], & -B+q\,(p+p') \end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant est du troisième degré en B et q'. Si l'on remplace B et q' par leurs valeurs tirées des égalités (9), il en résultera une équation entre x et y, qui devra être vérifiée par les coordonnées du pied de la quatrième normale menée du point P à la conique Σ.

Les numérateurs et les dénominateurs de B et q' étant du quatrième degré en x et y, cette équation sera du douzième degré, à moins, toutefois, que les termes de ce degré ne soient identiquement nuls; or, il n'en est pas ainsi (*), et l'équation dont il s'agit est réellement du douzième degré.

Mais le lieu qu'elle représente se décompose en plusieurs lignes de degré moindre.

Il est d'abord évident que la circonférence circonscrite au triangle ABC doit faire partie du lieu cherché. Car les normales aux points A, B, C de cette circonférence concourent à son centre, et tout point qui lui appartient peut être considéré comme le pied d'une quatrième normale menée de l'intersection des trois premières.

Cela résulte aussi du calcul. En effet, l'équation de la circonférence circonscrite au triangle ABC étant $pp'\mathrm{Y} + q\mathrm{X} = 0$, les coordonnées d'un point quelconque de cette courbe annulent les valeurs de B et de $qq' - pp'$, données par les équations (9). Et, lorsque $\mathrm{B} = 0$, le déterminant (10) devient

$$qpp' \begin{vmatrix} p(q+q'), & p(p'-p), & q+q' \\ p'(q+q'), & p'(p-p'), & q+q' \\ q(q-q'), & -q(p+p'), & -(p+p') \end{vmatrix},$$

(*) C'est ce que MM. Lefebvre et Miniscloux démontrent en remplaçant dans le déterminant (10) les valeurs de B et q' réduites aux termes du quatrième degré. Il en résulte un nouveau déterminant contenant les termes du douzième degré de l'équation (10), et qui effectivement ne peut être identiquement nul que dans des hypothèses incompatibles avec les données de la question. Nous laissons ce calcul à faire au lecteur. G.

ou, en développant,

$$2qpp'(p+p')(p-p')(q+q')(qq'-pp').$$

Or, $qq'-pp'=0$; donc le déterminant est réduit à zéro, par les valeurs des coordonnées d'un point quelconque de la circonférence $pp'Y+qX=0$. Ainsi, $pp'Y+qX$ entre comme facteur dans le premier membre de l'équation (10). Mais $pp'Y+qX$ ne s'y trouve qu'à la première puissance : c'est ce qu'on reconnaît en ordonnant suivant les puissances de B le déterminant qui forme le premier membre de l'équation (10).

On voit aussi que si la conique circonscrite au triangle se réduit au système de deux droites, dont l'une soit un côté quelconque AB du triangle, et l'autre une parallèle à ce côté menée par le sommet C qui lui est opposé, un point quelconque du côté AB peut être considéré comme le pied d'une normale qui concourt à l'infini avec les trois normales en A, B, C. On est conduit à chercher si les premiers membres des équations des trois côtés du triangle sont des facteurs du déterminant (10).

L'équation du côté AB étant $px+qy+1=0$, les coordonnées d'un point quelconque de ce côté réduisent les fonctions X, Y à

$$X=-p'q\,xy,$$
$$Y=-p\,xy,$$

et, par suite, les égalités (9) deviennent

$$B=2p'q,$$
$$q'=\frac{p'q}{p}.$$

En remplaçant B et q' par ces valeurs dans le déterminant (10), les éléments de la première colonne prennent les valeurs des éléments de la seconde, à un facteur près qui est $\frac{p}{q}$; donc, ce déterminant est annulé par les valeurs des coordonnées d'un point quelconque de la droite AB; on en peut conclure que le premier membre $px + qy + 1$ de l'équation de cette droite, entre comme facteur dans le déterminant.

Il en est évidemment de même des deux autres côtés du triangle, et, par conséquent, les trois côtés appartiennent au lieu géométrique cherché.

En résumé, l'équation (10) est réellement du douzième degré, et le lieu du pied de la quatrième normale se compose :

1° Du cercle circonscrit au triangle donné;

2° Des trois côtés de ce triangle;

3° D'un lieu du septième degré.

Question 721;

Par M. KAHER BEY (au Caire).

On donne sur un plan deux circonférences O *et* O'. *D'un point fixe* A *de la première on mène une droite* ABC *qui coupe cette circonférence, de nouveau, au point* B, *et la circonférence* O' *au point* C. *On porte le segment* BC *de* A *en* M *sur la droite* AB; *on demande le lieu décrit par le point* M, *lorsque la droite* AB *tourne autour du point* A (*).

Soient R et R' les rayons des cercles O et O'; $AO' = l$, et l'angle $O'AO = \alpha$. Prenons le point A pour pôle et le diamètre du premier cercle O passant par le point A comme axe polaire;

(*) L. lecteur est prié de faire la figure. Les deux cercles O et O' sont supposés extérieurs l'un à l'autre.

On a

$$AC = AB + BC = AB + AM = 2R\cos\omega + \rho;$$

et

$$\overline{CO'}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AO'}^2 - 2AC.AO'\cos O'AC,$$

ou

$$R'^2 = (2R\cos\omega + \rho)^2 + l^2 - 2l(2R\cos\omega + \rho)\cos(\omega - \alpha).$$

Telle est l'équation du lieu géométrique cherché.

On peut écrire cette équation comme il suit, en ordonnant les termes

$$\rho^2 + 2[2R\cos\omega - l\cos(\omega - \alpha)]\rho$$
$$+ 4R^2\cos^2\omega - 4Rl\cos\omega\cos(\omega - \alpha) + l^2 - R'^2 = 0,$$

ou

$$[\rho + 2R\cos\omega - l\cos(\omega - \alpha)]^2 + l^2\sin^2(\omega - \alpha) - R'^2 = 0.$$

La courbe est limitée; il faut évidemment que la quantité $l^2\sin^2(\omega - \alpha) - R'^2$ soit négative. On en conclut la condition

$$\sin^2(\omega - \alpha) < \left(\frac{R'}{l}\right)^2.$$

Dans chaque cas particulier il sera facile de calculer la valeur numérique des angles limites, d'après la formule

$$\sin[\Omega - \alpha] = \pm\frac{R'}{l}.$$

Les deux branches de la courbe se raccordent tangentiellement aux rayons vecteurs qui correspondent à ces limites. (Nous supposons $R' < l$; si l'on avait $R' > l$, il n'y aurait plus d'angles limites.)

La construction de la courbe n'offre aucune difficulté, car son équation peut s'écrire

$$\rho = l\cos(\omega - \alpha) - 2R\cos\omega \pm \sqrt{R'^2 - l^2\sin^2(\omega - \alpha)}.$$

L'équation en coordonnées rectilignes serait évidemment du quatrième degré.

Question 808;

PAR M. E. PELLET,
Élève du lycée de Nîmes.

$U=0$ *étant une équation algébrique;* $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots,$ *les dérivées successives du premier membre :*

1° *L'équation* $U=0$ *aura des racines imaginaires si on n'a pas, pour toutes les valeurs de* n *et de* x,

$$\left(\frac{U_n}{1.2\ldots n}\right)^2 - 2\,\frac{U_{n-1}U_{n+1}}{1.2\ldots(n-1).1.2\ldots(n+1)}$$
$$+2\,\frac{U_{n-2}U_{n+2}}{1.2\ldots(n-2).1.2\ldots(n+2)}$$
$$-2\,\frac{U_{n-3}U_{n+3}}{1.2\ldots(n-3).1.2\ldots(n+3)}+\ldots>0,$$

l'existence d'un couple de racines imaginaires étant accusée chaque fois que l'équation obtenue en égalant à 0 *le premier membre de l'inégalité précédente n'a pas toutes ses racines imaginaires.*

2° *Le même théorème subsistera si l'on remplace les dérivées* $U_1, U_2, \ldots$ *par les dérivées de la fonction suivante*

$$V = U + A_1U_1 + A_2U_2 + \ldots + A_m,$$

formée au moyen des coefficients d'une équation à racines toutes réelles,

$$x^m - A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} - \ldots \pm A_m = 0,$$

d'un degré égal ou inférieur au degré de $U=0$.

(J.-J.-A. MATHIEU.)

Dans l'équation $U=0$ mettons $x+h$ à la place de x, et développons ; il vient

$$(1)\quad U + h\frac{U_1}{1} + h^2\frac{U_2}{1.2} + \ldots + h^n\frac{U_n}{1.2\ldots n} + \ldots = 0.$$

Cette équation, où h est l'inconnue, a le même nombre de racines réelles et imaginaires, quelle que soit la valeur réelle substituée à x, que l'équation $U = 0$. La somme des carrés des produits n à n des racines de l'équation (1) est

$$(a)\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{U_n}{1.2\ldots n}\right)^2 - 2\,\frac{U_{n-1}\,U_{n+1}}{1.2\ldots(n-1).1.2\ldots(n+1)}\\ &\qquad + 2\,\frac{U_{n-2}\,U_{n+2}}{1.2\ldots(n-2).1.2\ldots(n+2)} - \ldots\end{aligned}\right.$$

(SERRET, *Algèbre supérieure*, n° 176, p. 391.)

Si le polynôme (a) est négatif ou nul, l'équation (1) a évidemment des racines imaginaires, et par suite, l'équation $U = 0$ a aussi des racines imaginaires.

Si l'équation $U = 0$ a toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation $V = 0$; donc, si l'équation $V = 0$ a des racines imaginaires, $U = 0$ n'a pas toutes ses racines réelles. (Cela a été prouvé dans les *Annales*, numéro de février, p. 76, année courante). Par conséquent, le théorème subsiste lorsqu'on substitue aux dérivées de U celles de V.