H. Sévène

Note sur un problème de géométrie élémentaire

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 494-496

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__494_0>

NOTE SUR UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE;

Par M. H. SÉVÈNE,
Élève en Mathématiques élémentaires à l'École Sainte-Geneviève.

Deux figures polygonales équivalentes étant données, on peut se demander s'il existe quelque moyen de décomposer l'une d'elles en parties qui puissent être placées sur l'autre, de manière à la recouvrir. C'est le problème dont nous allons chercher la solution.

Considérons d'abord quelques questions moins générales.

1. *Cas de deux parallélogrammes de même base et de même hauteur.*

La démonstration qui établit leur équivalence prouve aussi que pour recouvrir l'un d'entre eux, il suffit de partager l'autre, tantôt en deux segments, tantôt en trois. Supposons que les bases des parallélogrammes coïncident; il y aura deux segments seulement, si les bases supérieures empiètent l'une sur l'autre; il y en aura trois dans le cas contraire.

2. *Cas d'un triangle comparé à un parallélogramme ayant même base et une hauteur moitié plus petite.*

Marquons le milieu de l'un des deux autres côtés du triangle, et achevons le parallélogramme qui aurait pour côtés la base et la moitié du côté du triangle. Le parallélogramme obtenu a même base que le proposé et lui est de plus équivalent. Donc, l'un quelconque de ces deux parallélogrammes peut être décomposé en segments qui recouvrent l'autre. Mais, d'autre part, le triangle peut lui-même être décomposé en deux segments qui recouvrent le parallélogramme auxiliaire ; en effet, chacune des deux figures se compose d'une partie commune et d'un triangle. Or, on peut prouver facilement que les triangles sont superposables, comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun.

3. *Cas de deux triangles de même base et de même hauteur.*

D'après le n° 2, chacun des deux triangles peut être transformé en un parallélogramme de même base et de hauteur moitié moindre. D'ailleurs, d'après le n° 1, ces deux parallélogrammes peuvent être transformés l'un dans l'autre. Donc....

4. *Cas de deux triangles qui sont équivalents, sans avoir même base et même hauteur.*

Soient ABC, A′B′C′ ces triangles. Par un sommet C du premier, je mène une parallèle CD à la base. Je place ensuite le triangle A′B′C′ de telle façon que deux de ses sommets A′, B′ soient chacun sur une des droites parallèles AB, CD (*). Cela fait, je mène par C′ une parallèle à la base A′B′, jusqu'à sa rencontre E avec AB. Je dis que les deux triangles proposés peuvent être transformés l'un dans l'autre, par l'intermédiaire du triangle A′B′E. En effet, ce dernier a même base et même hauteur que A′B′C′. De plus, il a même hauteur que ABC, et comme il lui est équivalent, il a nécessairement même base ; donc on est ramené au problème 3.

5. *Cas de deux polygones équivalents quelconques.*

Chacun de ces polygones peut être transformé en un triangle, par une série de transformations de triangles

(*) Il serait facile de montrer que cette opération est toujours possible, pourvu qu'on choisisse convenablement le triangle que l'on déplace et le côté qu'on intercale entre les deux parallèles.

particls en d'autres triangles de même base et de même hauteur. Mais les deux polygones étant équivalents, les deux triangles qui en résultent sont aussi équivalents, et par conséquent peuvent être transformés l'un dans l'autre.