NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CH. CAYLA

Concours d'admission à l'École normale supérieure (année 1867). Composition mathématique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 489-492

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__489_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (ANNÉE 1867).

Composition mathématique;

SOLUTION DE M. CH. CAYLA,
Répétiteur au collége Rollin.

On donne deux droites rectangulaires AB, CD; *et on considère les hyperboles ayant la droite* AB *pour asymptote, et tangentes à la droite* CD *au point fixe* P.

On demande :

1° *Le lieu des foyers de toutes ces hyperboles;*

2° *Le lieu du point de rencontre de la seconde asymptote avec la perpendiculaire abaissée du point fixe sur la directrice;*

3° *Le lieu des points d'intersection de la seconde asymptote avec la droite qui joint le foyer au point d'intersection des deux droites données.*

1° Soit F le foyer d'une des hyperboles remplissant les conditions énoncées. Je mène la droite OF, et FG parallèle à AB; et je prolonge PF jusqu'en B. Les angles $\widehat{GFO}$, $\widehat{OFP}$ sont égaux (propriété connue des coniques).

Or,

$$\widehat{GFO} = \widehat{AOF};$$

mais

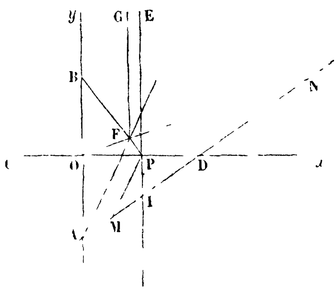
$$\widehat{AOF} = \widehat{OBF} + \widehat{BFO},$$

$$\widehat{OFP} = \widehat{OBF} + \widehat{BOF}.$$

Les premiers membres étant égaux, il en résulte

$$\widehat{BFO} = \widehat{BOF} \quad \text{et} \quad BO = BF.$$

Le lieu des points F est donc la strophoïde rectangulaire définie par le point P et la droite AB.



2° Par le point fixe P, je mène PE parallèle à AB. Je joins AF (*) : cette droite est perpendiculaire à la directrice; par suite, la parallèle menée à cette droite par le point P rencontrera la seconde asymptote AD en un point M du lieu cherché. D'ailleurs, OP = DP (propriété de l'hyperbole).

Or,

$$\widehat{PMI} = \widehat{OAF} = 90 - \widehat{OPM} = \widehat{MPI}.$$

Donc le triangle MPI est isocèle et MI = IP.

(*) Le point A est le centre de l'hyperbole.

Par conséquent, le point M décrit une strophoïde rectangulaire définie par le point fixe D et la droite PE. Cette strophoïde est égale et parallèle à la première.

3° Pour trouver le troisième lieu, je me sers de l'équation focale des coniques

$$(1-m^2)x^2 - 2mnxy + (1-n^2)y^2 - 2(\alpha + mp)x$$
$$- 2(\beta + np)y + \alpha^2 + \beta^2 - p^2 = 0.$$

L'axe des y est asymptote; donc

$$(1) \qquad n^2 = 1,$$
$$(2) \qquad \beta + np = 0.$$

Ces hyperboles sont tangentes à l'axe des x au point P dont l'abscisse est a, ce qui donne les relations

$$(3) \qquad \beta^2(1-m^2) = (p + m\alpha)^2,$$
$$(4) \qquad a(1-m^2) = \alpha + mp.$$

Un point du lieu est défini par l'intersection de la droite OF qui a pour équation

$$(5) \qquad \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta},$$

avec l'asymptote AD, qui, passant par le point fixe D, a une équation de la forme

$$y = t(x - 2a).$$

Le coefficient angulaire t est donné par la formule

$$1 - m^2 - 2mnt = 0.$$

On a donc, pour l'équation de AD,

$$(6) \qquad 2mny = (1-m^2)(x - 2a);$$

on aura l'équation du lieu en éliminant α, β, m, n, p entre les six équations numérotées.

Portant les valeurs de α, β, tirées de (2) et (5), dans l'équation (3), il vient

$$1 - m^2 = \left(1 - \frac{nmx}{y}\right)^2,$$

ou

$$m\,(x^2 + y^2) = 2\,nxy,$$

d'où l'on tire

$$m^2 = \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{et} \quad mn = \frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

Substituant dans (6) et simplifiant, on a l'équation du lieu

$$4xy^2(x^2+y^2) = (x^2-y^2)^2(x - 2a).$$

Cette équation du cinquième degré ne contient que des termes du cinquième et du quatrième degrés. Il est avantageux de la transformer en coordonnées polaires

$$4\rho\cos\omega\sin^2\omega = (\cos^2\omega - \sin^2\omega)^2(\rho\cos\omega - 2a),$$

$$\rho = 2a\,\frac{(2\cos^2\omega - 1)^2}{\cos^2\omega\,(4\cos^4\omega - 3)}.$$

Sous cette forme il est facile de construire la courbe qui représente le lieu des points N.

Note. — Solution analogue par M. Pelatan, élève du lycée de Nîmes.