NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

C.-E. PAGE

Mouvements relatifs à la surface de la terre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 481-489

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__481_0>

MOUVEMENTS RELATIFS A LA SURFACE DE LA TERRE

(voir p 387);

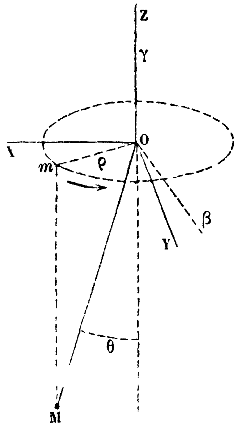
PAR M. C.-E. PAGE,
Professeur à l'École d'Artillerie de Vincennes.

Pendule conique.

Parmi les différents problèmes que présente la question des mouvements relatifs, un des plus intéressants est celui du pendule conique, parce que c'est dans le mouvement de ce pendule qu'on peut constater de la manière la plus évidente l'influence de la rotation de la terre, comme le prouve la belle expérience de M. Foucault (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1851).

Le pendule OM ayant l'entière liberté de tourner dans

FIG. 1.



tous les sens autour du point de suspension O, nous pouvons nous représenter tous les mouvements de ce pendule, en supposant qu'il tourne, avec une certaine vitesse angulaire variable β, autour d'un axe $O\beta$ auquel il reste constamment perpendiculaire; tandis que cet axe lui-même tourne avec une certaine vitesse angulaire variable γ autour de la verticale OZ.

Le plan perpendiculaire à l'axe $O\beta$, dans lequel le pendule se meut en s'approchant et s'éloignant alternativement de la verticale, est le plan d'oscillation.

Soient $OM = l$ la longueur du pendule, θ l'angle d'écart variable, $Om = \rho$ la projection de la longueur l sur le plan horizontal, nous aurons

$$\rho = l.\sin\theta.$$

Le problème est complétement résolu quand on peut exprimer les deux variables β et γ en fonction du temps. On en déduit les angles décrits en vertu de ces vitesses angulaires; par suite, on peut construire la courbe engendrée par la projection m du pendule sur le plan horizontal; enfin, on connaît le mouvement du point m sur cette courbe.

Avant de développer les calculs, nous exposerons les conclusions qu'on en peut tirer; nous commencerons par rappeler la solution du problème dans l'hypothèse de l'immobilité de la terre.

Dans ce cas, on obtient immédiatement deux intégrales qui sont les expressions du principe des forces vives et du principe des aires. En vertu de ce dernier principe, les aires engendrées par le rayon ρ sont proportionnelles aux temps employés à les décrire.

Pour que la courbe décrite par la projection m du pendule sur le plan horizontal soit une circonférence, il faut qu'en représentant par α la valeur initiale de l'angle d'écart θ; par c la valeur initiale de la vitesse angulaire γ, on ait

$$c = \sqrt{\frac{g}{l.\cos\alpha}}.$$

Quand c est moindre que cette valeur, l'angle θ reste toujours moindre que l'angle α; lorsque l'angle α est très-petit, la courbe décrite par la projection du pendule est une ellipse tournant elle-même autour de son centre avec une vitesse angulaire variable. En appelant a le demi-grand axe de cette ellipse, b le demi-petit axe, on a

$$a = l.\sin\alpha \quad \text{et} \quad b = l.\sin\alpha.c.\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

En représentant par γ_1 la vitesse angulaire relative avec laquelle le rayon ρ tourne dans le plan de l'ellipse, par γ_2 la vitesse angulaire avec laquelle le plan de l'ellipse tourne autour du point O, nous aurons, pour la vitesse angulaire absolue avec laquelle le rayon ρ tourne autour du point O,

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2;$$

or, on a la relation

$$\gamma_1 = \gamma.\cos\theta, \quad \text{d'où} \quad \gamma_2 = \gamma(1 - \cos\theta);$$

on voit que tant que l'angle θ reste très-petit, la vitesse angulaire γ_2 n'est qu'une très-petite fraction de la vitesse angulaire γ; par suite, tant qu'on se borne à considérer un petit nombre d'oscillations, on peut faire abstraction du déplacement de l'ellipse.

Il est facile de déterminer à chaque instant la position du point m; pour cela, supposons que le rayon $a = l.\sin\alpha$, de grandeur invariable, tourne autour du point O avec la vitesse angulaire constante c. Au bout du temps t, l'aire du secteur circulaire engendré par le rayon a sera justement égale à l'aire du secteur elliptique engendré par le rayon ρ pendant le même temps. La détermination de la position du point m est donc ramenée à une question de quadrature.

En appelant T la durée d'une oscillation, on a

$$\frac{1}{2}.c.l^2.\sin^2 a.\mathrm{T} = \frac{1}{2}\pi\ c.l^2.\sin^2 a.\sqrt{\frac{l}{g}},\quad \text{d'où}\quad \mathrm{T} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Lorsqu'on tient compte du mouvement de rotation de la terre, on n'obtient qu'une seule intégrale qui est l'expression du principe des forces vives, le principe des aires n'est pas applicable ; il s'ensuit que le problème ne peut être discuté qu'au moyen des équations différentielles.

Considérons d'abord une latitude moyenne, telle que celle de Paris, par exemple. Supposons que le pendule soit écarté de sa position d'équilibre dans une direction perpendiculaire au plan méridien, puis abandonné à l'action de la pesanteur et de la force centrifuge composée, sans aucune vitesse initiale relative.

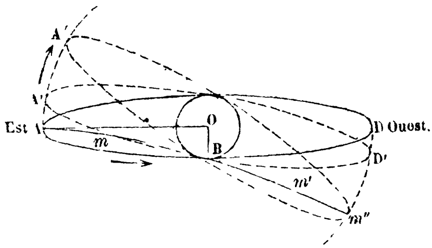
Concevons un système mobile tournant autour de la verticale, avec la vitesse angulaire relative $-\omega.\sin\lambda$, c'est-à dire ayant une vitesse angulaire relative justement égale et contraire à la composante de la vitesse angulaire de la terre autour de la verticale.

Par rapport à ce système, le mouvement est le même que si, la terre étant en repos, le pendule avait reçu la vitesse angulaire relative

$$c = +\omega.\sin\lambda.$$

Ainsi, pour déterminer la courbe engendrée par la projection m du pendule sur le plan horizontal, commençons par construire l'ellipse ABD dont le demi-grand axe OA égale $l\sin\alpha$, le demi-petit axe OB égale $l.\sin\alpha.\omega.\sin\lambda.\sqrt{\frac{l}{g}}$; tandis que le point m se meut sur cette ellipse comme dans l'hypothèse de l'immobilité de la terre, l'ellipse tourne autour de son centre avec

Fig. 2.



la vitesse angulaire constante $-\omega . \sin \lambda$. On forme ainsi la courbe A$mm'm''$, convexe du côté du point de suspension O, et tangente à la circonférence dont OB est le rayon.

On voit que le plan d'oscillation tourne autour de la verticale dans le même sens que la terre, et non pas en sens contraire; mais comme il ne fait pas une demi-révolution pendant une oscillation, les points culminants vont en rétrogradant puisqu'ils correspondent aux extrémités du grand axe de l'ellipse, lequel tourne avec la vitesse $-\omega . \sin \lambda$.

Lorsqu'on ne fait attention qu'aux positions du plan d'oscillation qui correspondent aux plus grands écarts du pendule, ce plan semble tourner en sens contraire de la terre.

Lorsque l'écart initial n'est pas dirigé perpendiculairement au plan méridien, la construction qui vient d'être indiquée n'est suffisamment approchée que pour les latitudes élevées. Au pôle, elle est rigoureusement exacte pour toutes les directions.

En effet, au pôle, le pendule écarté de sa position d'équilibre, et en repos relativement à la terre, est animé autour de la verticale d'une vitesse angulaire absolue $+\omega$. En l'abandonnant à l'action de la pesanteur, il prend le mouvement absolu correspondant à cette vitesse initiale; par conséquent, la projection horizontale décrit une ellipse sur un plan horizontal en repos ; mais la terre tournant relativement à ce plan avec la vitesse angulaire $+\omega$, le mouvement relatif est le même que si, la terre étant en repos, l'ellipse tournait en sens contraire avec la vitesse angulaire $-\omega$.

Pour parvenir à nous représenter ce qui a lieu sous toutes les latitudes et pour tous les azimuts, cherchons ce qui se passe sous l'équateur.

Quand les oscillations sont dirigées perpendiculairement au plan méridien, la force centrifuge composée est dirigée suivant le fil de suspension; par conséquent, elle ne modifie en rien le mouvement du pendule, qui continue à osciller dans le plan de l'équateur, exactement comme si la terre était en repos. Elle modifie seulement la tension du fil. Cette tension est diminuée quand le pendule marche de l'est à l'ouest, elle est augmentée quand il marche de l'ouest à l'est.

Quand le plan d'oscillation n'est pas perpendiculaire au plan méridien, le pendule est poussé par la force centrifuge composée, vers l'est pendant qu'il descend, et vers l'ouest pendant qu'il remonte.

L'angle d'écart initial étant dirigé dans le plan méridien du côté du sud, la projection du pendule sur le plan horizontal décrit une courbe convexe du côté de l'est, le plan d'oscillation tourne de droite à gauche et décrit un peu plus d'une demi-révolution pendant la première oscillation. A la fin de cette première oscillation, la vitesse angulaire γ n'est pas nulle, mais conserve une valeur positive, c'est-à-dire de droite à gauche; par conséquent, la seconde oscillation n'est pas indépendante de la première.

Pendant la seconde oscillation, le pendule marchant du nord vers le sud, la force centrifuge composée tend à faire tourner le plan d'oscillation de gauche à droite et détruit en partie la vitesse angulaire acquise pendant la première oscillation ; la courbe décrite par la projection horizontale est légèrement convexe vers l'ouest et passe très-près du centre. Au bout de la seconde oscillation, la vitesse angulaire est presque nulle, et le point le plus élevé s'est rapproché du plan de l'équateur. Dans une longue série d'oscillations, les points culminants se déplacent très-lentement en tournant de droite à gauche et tendent à venir se placer dans le plan de l'équateur.

Le pendule étant écarté dans le plan méridien du côté du nord, le plan d'oscillation commence par tourner de gauche à droite ; la courbe décrite par la projection horizontale pendant la première oscillation est toujours convexe du côté de l'est. Les points les plus élevés tendent à venir se placer dans le plan de l'équateur, en tournant de gauche à droite.

Sous une latitude quelconque, concevons toujours le système mobile tournant autour de la verticale avec la vitesse angulaire relative

$$- \omega . \sin \lambda.$$

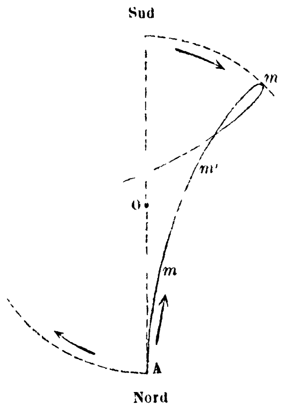
Si l'écart initial n'est pas perpendiculaire au plan méridien, le pendule ne prend pas exactement, par rapport à ce système mobile, le même mouvement que si la terre était en repos et s'il avait reçu la vitesse angulaire initiale $+ \omega \sin \lambda$.

Si l'écart est dirigé dans le plan méridien du côté du sud, la vitesse angulaire γ est un peu augmentée ; elle n'est pas nulle à la fin de la première oscillation, mais conserve une valeur positive. La seconde oscillation n'est pas indépendante de la première ; en général, les oscillations successives ne sont pas indépendantes l'une de l'autre.

L'arc décrit autour de la verticale pendant la première oscillation est un peu augmenté; par suite, la quantité dont le point culminant rétrograde est un peu diminuée.

Quand l'écart initial est dirigé du côté du nord, la vitesse angulaire γ est un peu ralentie; elle devient nulle

FIG 3.



avant la fin de l'oscillation, elle est négative au point culminant; par suite, la courbe décrite par la projection horizontale doit former une boucle, comme l'indique la figure.

Tant que la vitesse angulaire γ correspondant au point culminant n'est pas nulle, qu'elle soit positive ou négative, le pendule n'atteint pas une hauteur égale à celle d'où il est parti.

En résumé, l'effet le plus apparent produit par la rotation de la terre, sur le mouvement du pendule conique, est la rétrogradation des points culminants. La vitesse angulaire avec laquelle cette rétrogradation s'effectue n'est pas la même dans tous les azimuts. Elle est justement égale et contraire à la composante de la vitesse angulaire de la terre autour de la verticale, quand l'écart initial est perpendiculaire au plan méridien ; elle est un peu moindre quand l'écart est dirigé dans le plan méridien du côté du sud, et un peu plus grande quand il est dirigé du côté du nord.