ALPHONSE ELLIE

Question du concours de mathématiques spéciales des lycées des départements

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 457-466

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__457_1>

QUESTION
du Concours de Mathématiques spéciales des lycées des départements;

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE PAR M. ALPHONSE ELLIE,
Maître répétiteur au lycée de Bordeaux.

Étant donné un ellipsoïde, on propose : 1° *de trouver sur sa surface un point, et dans l'espace une droite telle, que si on prend ce point pour sommet des cônes ayant pour directrices les sections de l'ellipsoïde par des plans passant par la droite, ces cônes soient de révolution;* 2° *de trouver le lieu de la droite lorsque l'axe moyen varie.*

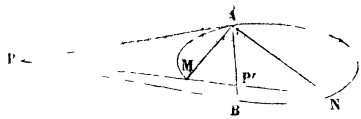
1° Prenons un point quelconque, A, sur l'ellipsoïde;

(*) Dans une conique à centre, la différence des carrés des distances d'un foyer à un diamètre quelconque, et du centre à la tangente parallèle à ce diamètre, est invariable, car elle est égale au produit des perpendiculaires abaissées des deux foyers sur la tangente. Il en résulte que la différence des carrés des distances d'un foyer à deux diamètres quelconques est égale à la différence des carrés des distances du centre aux deux tangentes parallèles à ces diamètres. Or, les médianes d'un parallélogramme sont évidemment deux diamètres communs à toutes les coniques tangentes aux quatre côtés du parallélogramme, par conséquent le lieu des foyers de ces coniques est celui des points tels, que la différence des carrés de leurs distances aux deux médianes est une quantité constante (égale à $p^2 - q^2$); c'est-à-dire que ce lieu est une hyperbole équilatère dont l'équation rapportée aux deux médianes prises pour axes est

$$y^2 - x^2 = \frac{p^2 - q^2}{\sin^2 \varphi},$$

où φ représente l'un des angles formés par les médianes.

menons la normale, AB, en ce point, et les plans tangents aux extrémités A, B, de cette normale. Considérons un plan passant par la normale; ce plan coupe l'ellipsoïde et les deux plans tangents suivant une ellipse et deux tangentes AP, BP. Le point P est le pôle de la normale; d'où il résulte que si l'on mène une sécante quelconque par ce point, elle rencontrera l'ellipse et la normale en des points M, N et P' tels, que le faisceau (A.PMP'N)



est harmonique, et comme AB est perpendiculaire à AP, toute droite perpendiculaire à la normale AB et limitée aux droites AM, AN sera divisée en deux parties égales par AB. Cela posé, considérons le cône ayant pour sommet le point A et pour directrice l'intersection de l'ellipsoïde par un plan passant par l'intersection des deux plans tangents mentionnés ci-dessus. Il résulte clairement de ce qui précède que toute section faite dans le cône parallèlement au plan tangent en A aura son centre sur AB; ce cône est donc droit; pour qu'il soit de révolution, il faut que ces sections soient des cercles : or, le point A est l'une de ces sections, ce point est donc un point cercle; mais il appartient à l'ellipsoïde, c'est donc l'un des quatre ombilics. Ainsi, *le point cherché est l'un des ombilics, et la droite est l'intersection des plans tangents à l'ellipsoïde menés aux extrémités de la normale à l'ombilic* (*).

2° L'ombilic étant dans une section principale perpen-

(*) Cette démonstration, assurément très-simple, détermine bien quatre solutions de la question proposée, mais elle n'établit pas que ce sont les seules solutions que la question puisse admettre. G.

diculaire à l'axe moyen, les deux plans tangents sont parallèles à cet axe; il en est de même de leur intersection Cette droite. quand l'axe moyen varie de grandeur, se meut parallèlement à elle-même, engendrant un cylindre dont il est d'ailleurs facile d'avoir l'équation. Prenons pour plan des xy la section principale contenant l'ombilic; la droite est perpendiculaire à ce plan, et l'équation du cylindre est la même que celle de sa trace sur ce plan; mais cette trace est le lieu du pôle de la normale quand le point de contact se déplace sur l'ellipse; on sait que cette courbe a pour équation

$$x^2y^2(a^2-c^2)^2 - a^6y^2 - c^6x^2 = 0;$$

elle a quatre branches infinies, symétriques deux à deux par rapport aux axes et au centre, dont les asymptotes sont parallèles aux axes, et à des distances

$$x = \pm\frac{a^3}{a^2-c^2},\quad y = \pm\frac{c^3}{a^2-c^2}.$$

L'origine est un point isolé.

Même question;

Solution géométrique par M. Julien WELSCH,
Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Metz
(classe de M. Ribout).

Je nomme P et D le point et la droite cherchés; Q la section faite dans l'ellipsoïde par un plan passant par la droite D, DQ ce plan, et PQ le cône de révolution dont le sommet est P, et la base Q.

Le cône coupe l'ellipsoïde suivant deux courbes planes dont l'une se réduit à un point P. Si le plan DQ tourne autour de la droite D jusqu'à ce qu'il passe par le point P, la section Q passera elle-même en P, et le cône PQ coupera l'ellipsoïde suivant deux coniques planes réduites toutes deux au point P. Le plan DP est donc un plan tangent. D'ailleurs le point est un ombilic; car, lorsque le plan DQ est venu se confondre avec le plan DP, le cône PQ s'est réduit à ce plan. Comme ce cône est toujours de révolution autour d'un axe passant par le point P, on peut considérer le plan DP comme de révolution autour de la normale au point P à l'ellipsoïde, normale qui est perpendiculaire au plan DP. Or, on sait que tout plan tel que DP, perpendiculaire à l'axe d'un cône de révolution, coupe ce cône suivant un cercle; comme la courbe d'intersection se réduit au point P, ce point est un point cercle; c'est donc aussi un point cercle de l'ellipsoïde, c'est-à-dire un ombilic.

Le plan DP rencontrera tous les cônes PQ suivant des cercles réduits à un même point P; car le plan DP est le plan de la seconde courbe plane d'intersection des deux surfaces (cône PQ et ellipsoïde), et comme l'intersection de l'ellipsoïde par ce plan est un point cercle, il en est de même de l'intersection des cônes PQ par ce plan. Le plan DP est donc perpendiculaire à l'axe de ces cônes PQ, et ces cônes ont tous pour axe la normale en P à l'ellipsoïde.

Nous avons dit que le plan DP est un plan tangent à l'ellipsoïde; par la droite D il passe un second plan tangent à cette surface; soit P′ le point de contact. La section Q est ici réduite au point P′, et le cône PQ lui-même se réduit à son axe PP′. Puisque tous les cônes considérés ont pour axe la normale en P à l'ellipsoïde, on voit que PP′, axe de l'un de ces cônes, est la normale en P à l'ellipsoïde; cette normale a pour polaire la droite D, et cela suffit pour définir cette droite.

Le point P étant un ombilic appartient à l'ellipse principale dont les axes sont le grand et le petit axe de l'ellipsoïde; la normale PP′ est située tout entière dans ce plan; les plans tangents DP et DP′ sont perpendiculaires à ce plan, et leur intersection D lui est aussi perpendiculaire; elle est donc parallèle à l'axe moyen.

Si l'ellipsoïde n'est pas de révolution, il y a quatre ombilics, et comme à chacun d'eux correspond une droite D, le problème admet quatre solutions; si l'ellipsoïde est de révolution, deux des axes sont égaux; le point P est à l'une des extrémités du troisième axe, et la droite D est rejetée à l'infini, parallèlement aux plans cycliques; il y a deux solutions. Enfin, si les trois axes sont égaux, on a une sphère, tous les points de sa surface répondent à la question, et la droite D est la droite de l'infini sur le plan tangent au point P.

Supposons maintenant que le grand axe et le petit axe restant fixes, l'axe moyen varie. Le point P décrira l'ellipse principale fixe; et la droite D, restant constamment parallèle à l'axe moyen, décrira un cylindre dont une section droite sera dans le plan de cette ellipse. On pourra trouver l'équation de cette section droite en remarquant que le pied L de la droite D, sur ce plan, est le pôle de la normale en P à l'ellipse principale; il suffit donc de trouver le lieu des pôles L des normales à cette ellipse.

Nommons a, b, c les demi-axes de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

En supposant

$$a>b>c,$$

l'ellipse considérée, et la normale en un point quelconque (x, y) de cette courbe, auront pour équations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (1)$$

et

$$(2) \qquad a^2 z X - c^2 x Z = (a^2 - c^2) xz.$$

La polaire du point L ou (α, γ) sera représentée par

$$(3) \qquad c^2 \alpha X + a^2 \gamma Z = a^2 c^2.$$

En identifiant les équations (2) et (3), on a

$$x = \frac{a^4}{(a^2 - c^2)\alpha}, \quad z = \frac{-c^4}{(a^2 - c^2)\gamma},$$

et la substitution de ces valeurs de x, y dans l'équation (1) donne

$$a^6 \gamma^2 + c^6 \alpha^2 = (a^2 - c^2)^2 \alpha^2 \gamma^2.$$

C'est l'équation du lieu cherché (*).

Même question ;

Solution analytique par M. Édouard DUVIVIER,
Élève au lycée de Bordeaux (classe de M. de Lagrandval.)

Je prends pour origine des coordonnées un point quelconque de l'ellipsoïde ; pour axe des z la normale en ce point, et pour axes des x et des y deux droites rectangulaires quelconques dans le plan tangent à l'origine à l'ellipsoïde dont l'équation est

$$(1) \quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2C''z = 0.$$

Le cône ayant son sommet à l'origine, et pour directrice la section de l'ellipsoïde par un plan

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - 1 = 0,$$

(*) Suit une description très-complète et très-détaillée de la courbe que cette équation représente ; nous la supprimons, présumant que le lecteur y suppléera facilement.

où α, β, γ sont des paramètres variables, a pour équation

$$\begin{aligned}&Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz\\&\quad + 2B'xz + 2B''xy + 2C''z(\alpha x + \beta y + \gamma z) = 0 \;(^*),\end{aligned}$$

ou bien

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}&Ax^2 + A'y^2 + (A'' + 2C''\gamma)z^2\\&\quad + 2(B + C''\beta)yz + 2(B' + C''\alpha)xz + 2B''xy = 0.\end{aligned}\right.$$

Les équations qui expriment que ce cône est de révolution sont les suivantes :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}&A - \frac{B''(B' + C''\alpha)}{B + C''\beta} = A' - \frac{B''(B + C''\beta)}{B' + C''\alpha}\\&\quad = A'' + 2C''\gamma - \frac{(B + C''\beta)(B' + C''\alpha)}{B''}.\end{aligned}\right.$$

Pour que les plans $\alpha x + \beta y + \gamma z - 1 = 0$ passent par une droite fixe, il faut qu'au moyen des équations (3) il soit possible d'exprimer deux des paramètres α, β, γ par des fonctions du troisième paramètre, rationnelles et ne contenant ce paramètre qu'à la première puissance.

Je pose, pour abréger,

$$(4)\quad B' + C''\alpha = K, \quad B + C''\beta = K', \quad A'' + 2C''\gamma = M.$$

Les équations (3) deviennent

$$(5)\qquad A - B''\frac{K}{K'} = A' - B''\frac{K'}{K} = M - \frac{KK'}{B''};$$

(*) Cette équation montre que tous les cônes qui ont pour sommet commun un point de l'ellipsoïde, et pour directrices des sections planes de cette surface, sont coupes, ainsi que l'ellipsoïde, suivant des courbes semblables, par des plans parallèles à celui qui touche l'ellipsoïde au sommet commun de tous ces cônes. Dans le cas particulier où le point pris sur l'ellipsoïde est un *ombilic*, ces courbes semblables deviennent des cercles. G.

on en déduit

$$(A - A')K'K = B''(K^2 - K'^2),$$

et

$$K' = B''\left(\frac{A' - M}{B''^2 - K^2}\right) K.$$

J'élimine K' entre ces deux équations, il vient

$$(B''^2 - K^2)^2 - (A - A')(A' - M)(B''^2 - K^2) - B''^2(A' - M)^2 = 0,$$

d'où je tire

$$B''^2 - K^2 = \frac{(A' - M)}{2}\left[A - A' \pm \sqrt{(A - A')^2 + 4B''^2}\right],$$

et, par suite,

$$K = \pm\sqrt{B''^2 - \frac{A' - M}{2}\left[A - A' \pm \sqrt{(A - A')^2 + 4B''^2}\right]}.$$

Pour que le paramètre α soit une fonction rationnelle de γ, il faut que K s'exprime en fonction rationnelle de M ; ce qui exige qu'on ait

$$B'' = 0, \quad A - A' = 0.$$

Il faut donc que l'ellipsoïde soit rapportée à un des points de sa surface tel, que son équation soit de la forme

$$x^2 + y^2 + Pz^2 + 2Qyz + 2Q'xz + 2Rz = 0.$$

Sous cette forme, on voit que les sections de la surface par des plans parallèles au plan des xy sont des cercles; par suite, nous pouvons affirmer que les seuls points de l'ellipsoïde jouissant de la propriété demandée sont les ombilics.

Pour déterminer la droite cherchée, je prends l'ombilic pour origine des coordonnées; la normale pour axe des z; deux droites rectangulaires dans le plan tangent pour axes des x et des y.

Comme nous venons de le voir, l'équation de l'ellipsoïde est

$$(6) \qquad x^2+y^2+Pz^2+2Qyz+2Q'xz+2Rz=0.$$

L'équation du cône dont le sommet est à l'origine, et qui a pour directrice la section de l'ellipsoïde par le plan

$$(\alpha x+6y+\gamma z)-1=0,$$

est

$$x^2+y^2+Pz^2+2Qyz+2Q'xz+2Rz(\alpha x+6y+\gamma z)=0.$$

Les conditions pour que le cône soit de révolution deviennent

$$Q'+R\alpha=0, \quad Q+R6=0;$$

d'où

$$\alpha=-\frac{Q'}{R}, \quad 6=-\frac{Q}{R}.$$

L'équation des plans

$$\alpha x+6y+\gamma z-1=0$$

devient

$$Q'x+Qy-\gamma Rz+R=0.$$

Ces plans passent tous par la droite

$$z=0, \quad Q'x+Qy+R=0,$$

qui est située dans le plan des xy (*).

(*) En laissant les axes des x et des y rectangulaires dans le plan tangent, on peut faire disparaître l'un des rectangles yz, xz de l'équation (6). Si c'est le premier qui disparaît, l'équation de l'ellipsoïde se réduisant à

$$x^2+y^2+Pz^2+2Q''xz+2Rz=0,$$

on voit que le plan des xz est le plan principal de l'ellipsoïde qui passe par les ombilics. La droite

$$z=0, \quad Q'x+Qy+R=0,$$

Il est maintenant facile de trouver le lieu de cette droite quand l'axe moyen de l'ellipsoïde varie (*).