NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GABRIEL LIPPMANN

Lieu des foyers des coniques inscrites dans un parallélogramme donné

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 456-457

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__456_0>

LIEU DES FOYERS DES CONIQUES INSCRITES DANS UN PARALLÉLOGRAMME DONNÉ ;

SOLUTION DE M. GABRIEL LIPPMANN,
Élève en Mathématiques spéciales au lycée Napoléon.

On peut supposer les équations des quatre côtés du parallélogramme données sous la forme

$$\alpha + p = 0, \quad \alpha - p = 0, \quad \beta + q = 0, \quad \beta - q = 0;$$

p et q désignant les demi-hauteurs du parallélogramme donné, α et β désignant les distances d'un point (x, y) aux deux médianes du parallélogramme.

On sait que le produit des distances des deux foyers d'une conique à une tangente quelconque est une quantité constante. Soient (x, y) les coordonnées d'un foyer ; (x_1, y_1) les coordonnées de l'autre foyer. Les distances du foyer (x, y) aux quatre côtés du parallélogramme sont respectivement $(\alpha + p)$, $(\alpha - p)$, $(\beta + q)$, $(\beta - q)$. Les distances du foyer (x_1, y_1) aux mêmes droites peuvent de même se désigner par $(\alpha_1 + p)$, $(\alpha_1 - p)$, $(\beta_1 + q)$, $(\beta_1 - q)$. On a donc, en raison de la propriété rappelée plus haut, les trois équations

$$\begin{aligned}(\alpha + p)(\alpha_1 + p) &= (\alpha - p)(\alpha_1 - p)\\ &= (\beta + q)(\beta_1 + q) = (\beta - q)(\beta_1 - q).\end{aligned}$$

Pour avoir le lieu du foyer (x, y), il suffit évidemment d'éliminer entre ces trois équations x_1 et y_1, ou α_1 et β_1.

La première équation se réduit à

$$\alpha_1 = -\alpha,$$

la troisième à

$$\beta_1 = -\beta.$$

En substituant ces valeurs dans la seconde équation, on a pour le lieu cherché l'équation $\alpha^2 - \beta^2 = p^2 - q^2$, qui représente une hyperbole (*).