Nouvelles annales de mathématiques

Julien Delaunay

Sur la plus courte distance de deux points de la sphère

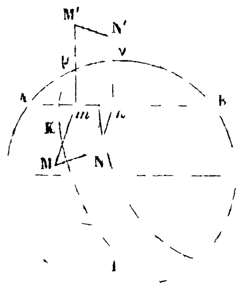
Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 454-455

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__454_0>

SUR LA PLUS COURTE DISTANCE DE DEUX POINTS DE LA SPHÈRE;

PAR M. JULIEN DELAUNAY,
Élève du lycée de Bordeaux.

Lemme I. — Étant données une portion de droite mn, et à ses deux extrémités les perpendiculaires mM, nN de longueurs constantes; la droite MN sera minimum, lorsque les deux perpendiculaires seront dans un même plan.



Lemme II. — Étant données une sphère et une corde AB, on mène à cette corde un plan perpendiculaire en un point m, qui coupe la sphère suivant le cercle μKL. De tous les points du plan qui ne sont pas dans l'intérieur de ce cercle, le plus rapproché de m est le point μ, intersection du cercle μKL avec le plus petit des deux arcs de grand cercle que sous-tend AB. (*Ces deux lemmes sont faciles à démontrer.*)

THÉORÈME. — *Deux points* A *et* B *étant situés sur une sphère, de toutes les lignes qui les unissent, n'ayant aucun point dans l'intérieur de la sphère, la plus courte* *est l'arc de grand cercle* $A\mu B$, *moindre qu'une demi-circonférence.*

Je suppose tracé un tout autre chemin. Soit M un de ses points. Par M je mène le plan $Mm\mu$ perpendiculaire à AB, et je prends mM' égal à mM. Je substitue à la courbe une ligne brisée inscrite, partant de A et finissant en B, dont je rabats les sommets, de même que M. Je joins successivement ces points rabattus. Je forme ainsi dans le plan de l'équateur une autre ligne brisée, dont chaque côté, tel que $M'N'$, est moindre que son correspondant MN dans l'autre (lemme I); par suite, la première ligne brisée est moindre que la deuxième. Cela étant vrai quelle que soit la ligne inscrite, si je la fais tendre vers la courbe, la ligne brisée rabattue tendra vers une autre courbe qui, à la limite, sera moindre que la proposée.

Tout point M de celle-ci se rabat en dehors du segment circulaire, car on a, d'après le lemme II,

$$mM > m\mu.$$

La courbe rabattue part de A et se termine en B, ayant tous ses points tournés vers la convexité de l'arc $A\mu B$; elle est donc plus grande que lui, et cet arc est *à fortiori* plus petit que la courbe donnée. Cette courbe ayant été prise quelconque, l'arc $A\mu B$ est le plus court chemin qu'on peut suivre entre A et B sans pénétrer dans la sphère.

(C. Q. F. D.)