NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

KOEHLER

Note sur l'intégration de quelques fonctions contenant un radical du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 448-451

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__448_1>

NOTE

Sur l'intégration de quelques fonctions contenant un radical du second degré;

PAR M. KOEHLER.

Soit, en premier lieu,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}};$$

Je suppose $c > 0$. En suivant la marche indiquée dans

(*) ISACII NEWTONI *Enumeratio linearum tertii ordinis, etc.*, p. 17; ed. Parisiis; 1797.

les Traités de Calcul intégral, on trouve

$$(1)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\, l\left[b+2cx+\sqrt{4c(a+bx+cx^2)}\right]+\mathrm{C}.$$

Je présenterai, au sujet de ce résultat, les remarques suivantes :

1° En désignant le trinôme du second degré et ses deux dérivées par P, P′ et P″, on aura

$$\mathrm{P}=a+bx+cx^2,\quad \mathrm{P}'=b+2cx,\quad \mathrm{P}''=2c.$$

Je substitue ces résultats dans (1) et j'obtiens

$$(2)\qquad \int \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{P}}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\, l\left(\mathrm{P}'+\sqrt{2\mathrm{PP}''}\right)+\mathrm{C}.$$

Au moyen de cette dernière formule, on écrira immédiatement

$$\int \frac{8dx}{\sqrt{5-3x+7x^2}} = \frac{8}{\sqrt{7}}\, l\left[14x-3+\sqrt{28(5-3x+7x^2)}\right]+\mathrm{C};$$

$$\begin{aligned}\int \frac{3dx}{\sqrt{8+9x^2}} &= l\left[18x+\sqrt{36(8+9x^2)}\right]+\mathrm{C}\\ &= l\left(3x+\sqrt{8+9x^2}\right)+\mathrm{C}'.\end{aligned}$$

2° On a

$$\begin{aligned}\mathrm{P}'+\sqrt{2\mathrm{PP}''} &= b+2cx+\sqrt{4c(a+bx+cx^2)},\\ \mathrm{P}'-\sqrt{2\mathrm{PP}''} &= b+2cx-\sqrt{4c(a+bx+cx^2)};\end{aligned}$$

d'où

$$\left(\mathrm{P}'+\sqrt{2\mathrm{PP}''}\right)\left(\mathrm{P}'-\sqrt{2\mathrm{PP}''}\right)=b^2-4ac=\text{const.},$$

d'où

$$l\left(\mathrm{P}'+\sqrt{2\mathrm{PP}''}\right)=-\,l\left(\mathrm{P}'-\sqrt{2\mathrm{PP}''}\right)+\mathrm{C}''.$$

De cette égalité il résulte que la formule (2) peut être mise sous la forme suivante :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{c}}\,l\left(P' - \sqrt{2PP''}\right) + C'''.$$

Soit, en second lieu, une intégrale de la forme

$$\int \frac{(Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + L)\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

Le numérateur est une fonction entière.

Pour fixer les idées, j'appliquerai la méthode que je propose à l'exemple suivant :

$$\int \frac{(5x^3 + x^2 - 3x + 1)\,dx}{\sqrt{1+4x+2x^2}}.$$

Désignant le trinôme sous le radical par P et sa dérivée par P′, je pose

$$(\alpha)\quad \int \frac{5x^3 + x^2 - 3x + 1}{\sqrt{P}}\,dx = (ax^2 + bx + c)\sqrt{P} + \int \frac{Q\,dx}{\sqrt{P}}.$$

a, b, c désignent des constantes indéterminées. En différentiant l'équation (α), on aura

$$\frac{5x^3 + x^2 - 3x + 1}{\sqrt{P}} = (2ax + b)\sqrt{P} + (ax^2 + bx + c)\frac{P'}{2\sqrt{P}} + \frac{Q}{\sqrt{P}};$$

d'où

$$5x^3 + x^2 - 3x + 1 = (2ax + b)\,P + (ax^2 + bx + c)\,\frac{P'}{2} + Q.$$

Remplaçons P, P′ par leurs valeurs, puis effectuons les calculs indiqués, il viendra

$$5x^3 + x^2 - 3x + 1 = 6ax^3 + \left.\begin{array}{l}10a\\+4b\end{array}\right| x^2 + \left.\begin{array}{l}2a\\+6b\\+2c\end{array}\right| x + 2c + b + Q.$$

Je puis disposer des indéterminées a, b, c de manière que les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres soient égaux. On aura alors pour Q une valeur constante. Les valeurs de a, b, c sont fournies par les équations suivantes :

$$(\beta)\quad 6a = 5,\quad 10a + 4b = 1,\quad 2a + 6b + 2c = -3;$$

d'où

$$a = \frac{5}{6},\quad b = -\frac{11}{6},\quad c = \frac{19}{6},$$

par conséquent,

$$Q = -\frac{21}{6}.$$

Remplaçons, dans l'égalité (α), a, b, c, Q par leurs valeurs, il viendra

$$\int \frac{(5x^3 + x^2 - 3x + 1)}{\sqrt{1 + 4x + 2x^2}}\,dx = \left(\frac{5}{6}x^2 - \frac{11}{6}x + \frac{19}{6}\right)\sqrt{1 + 4x + 2x^2}$$
$$- \frac{21}{6}\int \frac{dx}{\sqrt{1 + 4x + 2x^2}}.$$

En vertu de la formule (2), on écrira immédiatement

$$-\frac{21}{6}\int \frac{dx}{\sqrt{1 + 4x + 2x^2}}$$
$$= -\frac{21}{6\sqrt{2}}\, l\left[4x + 4 + \sqrt{8(2x^2 + 4x + 1)}\right] + C;$$

donc finalement :

$$\int \frac{5x^3 + x^2 - 3x + 1}{\sqrt{1 + 4x + 2x^2}}\,dx$$
$$= \left(\frac{5}{6}x^2 - \frac{11}{6}x + \frac{19}{6}\right)\sqrt{1 + 4x + 2x^2}$$
$$- \frac{7}{2\sqrt{2}}\, l\left[2x + 2 + \sqrt{2(2x^2 + 4x + 1)}\right] + C'.$$

Le système (β) est toujours possible, à cause de la constitution des équations de ce système. La marche à suivre pour le cas général est la même.

29.