NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. PAINVIN

Note sur les coniques conjuguées par rapport à un triangle

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 433-443

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__433_0>

NOTE SUR LES CONIQUES CONJUGUÉES PAR RAPPORT A UN TRIANGLE;

PAR M. L. PAINVIN.

1. Si le triangle fixe par rapport auquel les coniques sont *conjuguées* est choisi pour triangle de référence, l'équation générale des *coniques conjuguées* est

$$(1)\qquad mX^2 + nY^2 + pZ^2 = 0;$$

X, Y, Z sont les distances d'un point quelconque du plan aux côtés du triangle, de sorte que

$$(2)\qquad \begin{cases} X = a_1 - x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ Y = b_1 - x\cos\beta - y\sin\beta, \\ Z = c_1 - x\cos\gamma - y\sin\gamma, \end{cases}$$

les seconds membres égalés à zéro donnant, sous la forme normale, les équations en coordonnées cartésiennes des côtés du triangle.

Désignant par A, B, C, S, R les angles, la surface, le rayon circonscrit du triangle de référence, on a, entre les coordonnées X, Y, Z, la relation

$$(3)\qquad X\sin A + Y\sin B + Z\sin C = \frac{S}{R};$$

de plus, les angles α, β, γ sont liés aux angles A, B, C par les relations

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin A} = \dfrac{\sin(\gamma-\alpha)}{\sin B} = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin C}, \\[2ex] \dfrac{\cos(\beta-\gamma)}{\cos A} = \dfrac{\cos(\gamma-\alpha)}{\cos B} = \dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos C} = -1. \end{cases}$$

Les coordonnées X_0, Y_0, Z_0 du centre de la conique (1) seront déterminées par les équations

$$\frac{f'_X}{\sin A} = \frac{f'_Y}{\sin B} = \frac{f'_Z}{\sin C},$$

qu'on obtient en cherchant le pôle de la droite de l'infini. On déduit de là

$$(5) \qquad \frac{mX_0}{\sin A} = \frac{nY_0}{\sin B} = \frac{pZ_0}{\sin C},$$

ou, en ayant égard à la relation (3),

$$(5\ bis) \qquad \left\{ \begin{aligned} X_0 &= \frac{S\dfrac{\sin A}{m}}{R\left(\dfrac{\sin^2 A}{m} + \dfrac{\sin^2 B}{n} + \dfrac{\sin^2 C}{p}\right)}, \\ Y_0 &= \frac{S\dfrac{\sin B}{n}}{R\left(\dfrac{\sin^2 A}{m} + \dfrac{\sin^2 B}{n} + \dfrac{\sin^2 C}{p}\right)}, \\ Z_0 &= \frac{S\dfrac{\sin C}{p}}{R\left(\dfrac{\sin^2 A}{m} + \dfrac{\sin^2 B}{n} + \dfrac{\sin^2 C}{p}\right)}. \end{aligned} \right.$$

2. Ceci posé, rappelons que si l'équation d'une conique est (en coordonnées cartésiennes)

$$(6) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = H,$$

et si a, b sont les valeurs algébriques des longueurs des axes de cette conique, on a les relations

$$(7) \qquad a^2 + b^2 = \frac{(A + C)H}{AC - B^2}, \quad a^2 b^2 = \frac{H^2}{AC - B^2}.$$

La constante H est égale et de signe contraire au résultat qu'on obtient en remplaçant, dans le premier membre de l'équation générale de la courbe, les coordonnées variables par les coordonnées du centre. Ainsi

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} H &= -(mX_0^2 + nY_0^2 + pZ_0^2)\\ &= -\frac{S^2}{R^2}\cdot\frac{1}{\dfrac{\sin^2 A}{m}+\dfrac{\sin^2 B}{n}+\dfrac{\sin^2 C}{p}}.\end{aligned}\right.$$

Pour déterminer les constantes A, B, C, je transforme, à l'aide des formules (2), l'équation (1) de la courbe en coordonnées cartésiennes; on trouve alors

$$\left\{\begin{aligned} A &= m\cos^2\alpha + n\cos^2\beta + p\cos^2\gamma,\\ C &= m\sin^2\alpha + n\sin^2\beta + p\sin^2\gamma,\\ B &= m\sin\alpha\cos\alpha + n\sin\beta\cos\beta + p\sin\gamma\cos\gamma;\end{aligned}\right.$$

d'où l'on conclut

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &AC - B^2 = mnp\left(\frac{\sin^2 A}{m}+\frac{\sin^2 B}{n}+\frac{\sin^2 C}{p}\right),\\ &A + C = m + n + p.\end{aligned}\right.$$

Les relations (7), (8), (9) nous donnent immédiatement les formules suivantes :

$$(I)\quad \left\{\begin{aligned} a^2 + b^2 &= -\frac{S^2}{R^2}\cdot\frac{m+n+p}{mnp\left(\dfrac{\sin^2 A}{m}+\dfrac{\sin^2 B}{n}+\dfrac{\sin^2 C}{p}\right)^2},\\ a^2 b^2 &= \frac{S^4}{R^4}\cdot\frac{1}{mnp\left(\dfrac{\sin^2 A}{m}+\dfrac{\sin^2 B}{n}+\dfrac{\sin^2 C}{p}\right)^3};\end{aligned}\right.$$

a, b sont les valeurs algébriques des longueurs des axes de la conique

$$mX^2 + nY^2 + pZ^2 = 0,$$

conjuguée par rapport au triangle ($X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$).

Ces formules peuvent être utiles dans plusieurs circonstances; je vais dès maintenant en déduire quelques conséquences.

3. Ces formules nous fournissent une démonstration très-simple de la relation remarquable énoncée par M. Faure (*Nouvelles Annales*, 1861, p. 55).

Effectuons, en effet, le produit des valeurs (5 *bis*) et rappelons-nous que

$$\sin A \sin B \sin C = \frac{S}{2R^2},$$

il vient

$$R X_0 Y_0 Z_0 = \frac{S^4}{R^4} \cdot \frac{1}{mnp\left(\frac{\sin^2 A}{m} + \frac{\sin^2 B}{n} + \frac{\sin^2 C}{p}\right)^3};$$

et, d'après la seconde des relations (I),

$$(1^\circ) \qquad R X_0 Y_0 Z_0 = a^2 b^2.$$

C'est la relation énoncée par M. Faure : X_0, Y_0, Z_0 sont les distances du centre de la conique aux côtés du triangle conjugué; ainsi X_0 représente $+$ ou $-$ la distance du centre au côté BC, suivant que, par rapport à BC, le centre est ou n'est pas du même côté que le sommet opposé A.

4. L'équation du cercle circonscrit au triangle ABC est

$$(10) \qquad YZ \sin A + XZ \sin B + XY \sin C = 0;$$

or, on a identiquement

$$\begin{aligned} YZ \sin A + XZ \sin B + XY \sin C \\ = x^2(\cos\beta\cos\gamma\sin A + \cos\gamma\cos\alpha\sin B + \cos\alpha\cos\beta\sin C) \\ + y^2(\sin\beta\sin\gamma\sin A + \sin\gamma\sin\alpha\sin B + \sin\alpha\sin\beta\sin C) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

La puissance P^2 d'un point du plan par rapport au cercle circonscrit est alors

$$P^2 = \frac{YZ\sin A + XZ\sin B + XY\sin C}{\cos\beta\cos\gamma\sin A + \cos\gamma\cos\alpha\sin B + \cos\alpha\cos\beta\sin C}.$$

Mais puisque l'équation ci-dessus représente un cercle, on a

$$\begin{aligned}&\cos\beta\cos\gamma\sin A + \cos\gamma\cos\alpha\sin B + \cos\alpha\cos\beta\sin C\\ &= \sin\beta\sin\gamma\sin A + \sin\gamma\sin\alpha\sin B + \sin\alpha\sin\beta\sin C = k;\end{aligned}$$

d'où, en ajoutant ces valeurs égales et ayant égard aux relations (4),

$$2k = -(\sin A\cos A + \sin B\cos B + \sin C\cos C),$$

ou

$$-4k = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C = \frac{4S}{2R^2}.$$

Ainsi, la puissance P^2 d'un point quelconque du plan par rapport au cercle (10) est

$$(11)\qquad P^2 = -\frac{2R^2}{S}(YZ\sin A + XZ\sin B + XY\sin C).$$

Si l'on cherche la puissance du centre (5 *bis*) de la conique par rapport au cercle circonscrit, on trouve

$$P^2 = -\frac{2R^2}{S}\cdot\frac{S^2}{R^2}\cdot\frac{\sin A\sin B\sin C(m+n+p)}{mnp\left(\frac{\sin^2 A}{m} + \frac{\sin^2 B}{n} + \frac{\sin^2 C}{p}\right)^2},$$

ou, en ayant égard à la première des formules (I),

$$(2^\circ)\qquad P_0^2 = a^2 + b^2,$$

c'est-à-dire :

La puissance du centre d'une conique par rapport au cercle circonscrit à un triangle conjugué quelconque est *constante et égale à la somme des carrés des valeurs algébriques des axes.* C'est le théorème de M. Faure.

La relation précédente (2°) montre que :

Le produit des distances du centre d'une conique aux côtés d'un triangle conjugué quelconque par le rayon du cercle circonscrit à ce triangle est constant et égal au carré du produit des axes.

On voit que ces deux théorèmes sont la traduction géométrique des deux relations fondamentales (I).

5. Les formules (I) nous permettent encore de résoudre facilement les questions suivantes; je ne ferai qu'indiquer les résultats :

1° *Le lieu des centres des coniques conjuguées par rapport à un triangle fixe, et pour lesquelles la somme des carrés des valeurs algébriques des axes est constante, est le cercle*

$$(12)\quad \begin{cases} \mathrm{YZ}\sin\mathrm{A} + \mathrm{XZ}\sin\mathrm{B} + \mathrm{XY}\sin\mathrm{C} + \dfrac{a^2+b^2}{2\mathrm{S}} \\ \qquad \times (\mathrm{X}\sin\mathrm{A} + \mathrm{Y}\sin\mathrm{B} + \mathrm{Z}\sin\mathrm{C})^2 = 0. \end{cases}$$

Ce résultat se déduit de la première des relations (I) en éliminant m, n, p à l'aide des équations (5). L'équation (12) représente évidemment un cercle, puisque cette courbe (12) du second degré passe par les points circulaires à l'infini :

$$(13)\quad \begin{cases} \mathrm{YZ}\sin\mathrm{A} + \mathrm{XZ}\sin\mathrm{B} + \mathrm{XY}\sin\mathrm{C} = 0, & \text{cercle circonscrit au triangle de référence,} \\ \mathrm{X}\sin\mathrm{A} + \mathrm{Y}\sin\mathrm{B} + \mathrm{Z}\sin\mathrm{C} = 0, & \text{droite de l'infini.} \end{cases}$$

Dans le cas de l'hyperbole équilatère, où $a^2 + b^2 = 0$, le lieu est le cercle circonscrit au triangle fixe.

Ces résultats sont d'ailleurs des conséquences évidentes du théorème de M. Faure; mais on voit que la recherche directe du lieu est excessivement simple.

2° *Le lieu des centres des coniques conjuguées par rapport à un triangle fixe, et pour lesquelles le produit des axes est constant, est la courbe*

$$(14)\qquad XYZ = \frac{a^2 b^2 R^2}{2S^3}(X\sin A + Y\sin B + Z\sin C)^3.$$

C'est une courbe du troisième ordre inscrite dans le triangle fixe; ses trois points d'inflexion réels sont à l'infini; les tangentes d'inflexion ou asymptotes sont les trois côtés du triangle; le produit des distances de chaque point de la courbe aux trois côtés du triangle est constant.

3° *Le lieu des centres des coniques conjuguées par rapport à un triangle fixe, et pour lesquelles la somme des carrés des inverses des axes est constante, est la courbe*

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{S^2}{R^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)XYZ + (YZ\sin A + XZ\sin B + XY\sin C) \\ &\qquad\qquad \times (X\sin A + Y\sin B + Z\sin C) = 0. \end{aligned} \right.$$

C'est une courbe du troisième ordre circonscrite au triangle fixe; les directions asymptotiques sont les trois côtés du triangle. Car il est visible d'après l'équation que le côté $X = 0$, par exemple, rencontre la courbe en trois points, dont deux sont sur le cercle circonscrit, et un sur la droite de l'infini.

6. Cherchons les foyers de la courbe

$$(1)\qquad mX^2 + nY^2 + pZ^2 = 0.$$

L'équation quadratique des tangentes menées d'un point (X_0, Y_0, Z_0) à une courbe du second degré $F(X, Y, Z) = 0$ est

$$4F(X_0, Y_0, Z_0).F(X, Y, Z) - (XF'_{X_0} + YF'_{Y_0} + ZF'_{Z_0})^2 = 0,$$

équation qui deviendra, dans le cas de la courbe (1),

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &X^2\left(\frac{Y_0^2}{p}+\frac{Z_0^2}{n}\right)+Y^2\left(\frac{Z_0^2}{m}+\frac{X_0^2}{p}\right)+Z^2\left(\frac{X_0^2}{n}+\frac{Y_0^2}{m}\right)\\ &\qquad -2\frac{Y_0 Z_0}{m}YZ-2\frac{X_0 Z_0}{n}XZ-2\frac{X_0 Y_0}{p}XY=0.\end{aligned}\right.$$

Si nous exprimons que l'équation (16) représente un cercle, ce cercle aura son rayon nul, et le point (X_0, Y_0, Z_0), qui en est le centre, sera un *foyer*. Or, la courbe (16) sera un cercle, si elle passe par les points circulaires à l'infini, savoir :

$$\left\{\begin{aligned} &YZ\sin A+XZ\sin B+XY\sin C=0,\\ &X\sin A+Y\sin B+Z\sin C=0.\end{aligned}\right.$$

Mais l'équation générale des courbes du second degré passant par ces deux points est

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &(X\sin A+Y\sin B+Z\sin C)(\lambda X+\mu Y+\nu Z)\\ &\qquad +YZ\sin A+XZ\sin B+XY\sin C=0;\end{aligned}\right.$$

donc, en écrivant que les équations (16) et (17) représentent la même courbe, nous aurons exprimé que la courbe (16) est un cercle. Nous sommes ainsi conduits aux équations de condition

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\dfrac{Y_0^2}{p}+\dfrac{Z_0^2}{n}}{\lambda\sin A}=\frac{\dfrac{Z_0^2}{m}+\dfrac{X_0^2}{p}}{\mu\sin B}=\frac{\dfrac{X_0^2}{n}+\dfrac{Y_0^2}{m}}{\lambda\sin C}\\ &\qquad =\frac{-\dfrac{2Y_0Z_0}{m}}{\sin A+\nu\sin B+\mu\sin C}\\ &\qquad =\frac{-\dfrac{2X_0Z_0}{n}}{\nu\sin A+\sin B+\lambda\sin C}\\ &\qquad =\frac{-\dfrac{2X_0Y_0}{p}}{\mu\sin A+\lambda\sin B+\sin C}=\frac{1}{\rho}.\end{aligned}\right.$$

L'élimination des arbitraires λ, μ, ν s'effectue immédiatement, et, en égalant les valeurs de ρ, on trouve, après la suppression de l'indice o,

$$(19)\quad \begin{cases} HX^2 - 2UX\dfrac{\sin A}{m} + \dfrac{U^2}{m^2} = HY^2 - 2UY\dfrac{\sin B}{n} + \dfrac{U^2}{n^2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = HZ^2 - 2UZ\dfrac{\sin C}{p} + \dfrac{U^2}{p^2}, \end{cases}$$

équations dans lesquelles nous avons posé

$$(19\ bis)\quad \begin{cases} H = \dfrac{\sin^2 A}{m} + \dfrac{\sin^2 B}{n} + \dfrac{\sin^2 C}{p} \\ U = X\sin A + Y\sin B + Z\sin C. \end{cases}$$

Les équations (19) déterminent les coordonnées des foyers de la conique (1).

La résolution explicite de ces équations est possible; mais les valeurs obtenues sont assez compliquées. Comme je n'en dois pas faire usage pour le moment, je me dispenserai de les écrire. J'examinerai seulement le cas de la parabole.

7. Si on cherche les intersections de la conique

$$(1)\qquad mX^2 + nY^2 + pZ^2 = 0$$

avec la droite à l'infini

$$X\sin A + Y\sin B + Z\sin C = 0,$$

on en conclut le genre de la courbe. Ainsi on a :

Une *ellipse* lorsque

$$mnp\left(\frac{\sin^2 A}{m} + \frac{\sin^2 B}{n} + \frac{\sin^2 C}{p}\right) > 0;$$

Une *hyperbole* lorsque

$$mnp\left(\frac{\sin^2 A}{m} + \frac{\sin^2 B}{n} + \frac{\sin^2 C}{p}\right) < 0;$$

Une *parabole* lorsque

$$\frac{\sin^2 A}{m} + \frac{\sin^2 B}{n} + \frac{\sin^2 C}{p} = 0.$$

Ce dernier résultat s'obtient encore en écrivant que le centre (5) est sur la droite de l'infini.

Dans le cas de la parabole, la quantité H est nulle, et les relations (19) donnent les équations suivantes, qui déterminent le *foyer unique* à distance finie

$$(20)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{-X\sin A + Y\sin B + Z\sin C}{m} \\ &= \frac{X\sin A - Y\sin B + Z\sin C}{n} \\ &= \frac{X\sin A + Y\sin B - Z\sin C}{p}, \end{aligned} \right.$$

et l'on a, en outre, la relation

$$(20\ bis)\qquad \frac{\sin^2 A}{m} + \frac{\sin^2 B}{n} + \frac{\sin^2 C}{p} = 0.$$

L'élimination de m, n, p, entre les équations (20) et (20 *bis*) nous donne le lieu des foyers des paraboles conjuguées par rapport à un triangle fixe. On trouve ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 A}{-X\sin A + Y\sin B + Z\sin C} &+ \frac{\sin^2 B}{X\sin A - Y\sin B + Z\sin C} \\ &+ \frac{\sin^2 C}{X\sin A + Y\sin B - Z\sin C} = 0. \end{aligned}$$

Après quelques réductions visibles, lorsqu'on se rappelle les relations entre les lignes trigonométriques des angles d'un triangle, telles que

$$\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A = 2\sin B \sin C \cos A \ldots,$$

on obtient définitivement

$$(21)\quad \left\{ \begin{array}{l} X^2 \sin 2A + Y^2 \sin 2B + Z^2 \sin 2C \\ \quad - 2(YZ \sin A + XZ \sin B + XY \sin C) = 0. \end{array} \right.$$

On reconnaît l'équation du *cercle des neuf points* du triangle de référence. Je remarquerai aussi que l'équation

$$X^2 \sin 2A + Y^2 \sin 2B + Z^2 \sin 2C = 0$$

est l'équation du *cercle conjugué* par rapport au triangle de référence; les rectangles donnent le *cercle circonscrit;* de là une propriété du cercle des neuf points.

Nous arrivons ainsi à cette proposition :

Le lieu des foyers des paraboles conjuguées par rapport à un triangle fixe est le cercle des neuf points de ce triangle.

Ou encore :

Si l'on considère un triangle quelconque conjugué par rapport à une parabole fixe, le cercle des neuf points de ce triangle passe par le foyer de la parabole.

Je ne pense pas que cette propriété curieuse ait déjà été signalée (*).

(*) Quand M. Painvin nous a adressé cet article, la propriété dont il s'agit n'avait pas encore éte signalee dans les *Nouvelles Annales.*