NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

S. REALIS

Note sur quelques questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 415-420

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__415_0>

NOTE SUR QUELQUES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES;

PAR M. S. REALIS.

1. LEMME. — *Entre deux racines consécutives de l'équation* $F(x) = 0$, *il y a au moins une racine de l'équation*

$$F(x) - k F'(x) = 0,$$

dans laquelle k est un nombre quelconque différent de zéro. (WARING.)

C'est une conséquence évidente du théorème de Rolle. Si α et β sont deux racines consécutives de $F(x) = 0$, elles comprendront un nombre impair de racines de la dérivée $F'(x) = 0$, en sorte que $F'(\alpha)$ et $F'(\beta)$ seront de signes contraires. Or, en substituant α et β à la place de x dans l'expression $F(x) - kF'(x)$, on obtient les résultats $-kF'(\alpha)$, $-kF'(\beta)$, qui ont des signes contraires; donc, entre α et β il y a toujours une racine de

$$F(x) - k F'(x) = 0.$$

De même que le théorème dont elle dérive, cette proposition n'est pas restreinte aux équations algébriques; elle subsiste également pour les équations transcendantes, toutes les fois que $F(x)$ et $F'(x)$ sont des fonctions continues entre les limites qui comprennent les racines de $F(x) = 0$; mais ce n'est que des premières équations que nous avons à nous occuper ici.

COROLLAIRES. — 1° *Si l'équation algébrique*

$$F(x) = 0$$

a m racines réelles, l'équation

$$f(x) = F(x) - kF'(x) = 0$$

a aussi, au moins, m racines réelles.

2° *Entre deux racines consécutives de* $f(x) = 0$ *il ne peut y avoir plus d'une racine de* $F(x) = 0$.

3° *Si* $f(x) = 0$ *a i racines imaginaires,* $F(x) = 0$ *a, au moins, i racines imaginaires.*

2. Soit fait, comme ci-dessus,

$$F(x) - kF'(x) = f(x);$$

on aura, n étant le degré de $F(x)$, et $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x), \ldots, f^n(x)$ désignant les n dérivées successives du polynôme $f(x)$:

$$F(x) = f(x) + kf'(x) + k^2 f''(x) + k^3 f'''(x) + \ldots + k^n f^n(x).$$

Donc :

Une équation

$$f(x) = 0,$$

de degré n, étant donnée, si l'équation

$$F(x) = f(x) + kf'(x) + k^2 f''(x) + \ldots + k^n f^n(x) = 0,$$

où k est un nombre indépendant de x, a m racines réelles, la proposée aura elle-même, au moins, m racines réelles, dont m — 1 seront toujours comprises, chacune, entre deux racines consécutives de $F(x) = 0$. *Et, si la proposée a i racines imaginaires,* $F(x) = 0$ *aura, elle aussi, au moins i racines imaginaires.*

Dans la seconde partie de cet énoncé se trouve compris et généralisé celui de la question 777. (HERMITE.)

3. Le lemme mentionné au n° 1 conduit également à la solution de la question 775. (SYLVESTER.)

Soient

$$F(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n},$$

et $k = 1$, ce qui nous donne

$$f(x) = F(x) - F'(x) = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}.$$

Si l'équation $F(x) = 0$ a deux racines réelles, leurs valeurs seront nécessairement négatives; et, d'après le lemme, elles comprendront une ou plusieurs racines de $f(x) = 0$. Cela n'a pas lieu, puisque les racines de cette dernière équation sont toutes égales à zéro. Il s'ensuit donc, conformément à l'énoncé de la question 775, que la proposée ne peut avoir deux racines réelles.

4. La proposition suivante, que l'on peut rapprocher de celle énoncée au n° 2, se présente aussi comme conséquence du lemme cité. Je laisse au lecteur le soin d'en développer la démonstration.

L'équation

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0$$

ayant toutes ses racines réelles : si l'équation

$$f(x) = 0,$$

de degré n, a m racines réelles, l'équation

$$f(x) + A_1 f'(x) + A_2 f''(x) + \ldots + A_{n-1} f^{n-1}(x) + A_n f^n(x) = 0$$

a au moins m racines réelles; et si cette dernière équation a i racines imaginaires, $f(x) = 0$ a au moins i racines imaginaires (*).

(*) Cette proposition comprend évidemment l'énoncé de la question 778; si l'auteur n'en fait pas mention, c'est parce qu'il ne pouvait avoir connaissance de l'énoncé dont il s'agit à l'époque où il nous a adressé son article. G.

5. Observons (avec Waring) que ce qui est établi par le lemme du n° 1 à l'égard des racines des équations

$$F(x) = 0 \quad \text{et} \quad F(x) - k F'(x) = 0,$$

s'applique aux racines de même signe des équations

$$F(x) = 0 \quad \text{et} \quad F(x) - kxF'(x) = 0.$$

De là résulte une proposition connue qui s'énonce ainsi :

Si l'on a une équation

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + A_{n-1} x + A_n = 0,$$

et que l'on multiplie respectivement ses termes par

$$a, \quad a+b, \quad a+2b, \ldots, \quad a+(n-1)b, \quad a+nb,$$

(a et b étant des nombres quelconques), on forme une équation nouvelle qui a une racine comprise entre deux racines consécutives de la proposée, en exceptant la plus petite racine positive de la proposée et la racine négative qui la précède.

Sa démonstration est la même que pour le lemme cité. Deux nombres α et β, de même signe, étant racines consécutives de la proposée $F(x) = 0$, les quantités

$$F(\alpha) - k\alpha F'(\alpha) \quad \text{et} \quad F(\beta) - k\beta F'(\beta)$$

se réduisent respectivement à $-k\alpha F'(\alpha)$ et $-k\beta F'(\beta)$, et ont des signes contraires, puisque $F'(\alpha)$ et $F'(\beta)$ sont des quantités de signes contraires. Donc, deux nombres de même signe qui annulent $F(x)$ comprennent au moins une racine de l'équation

$$F(x - kxF'(x) = 0.$$

Posez $k = \dfrac{b}{a+nb}$, et développez ; cette équation s'écrira

$$ax^n + (a+b)A_1 x^{n-1} + (a+2b)A_2 x^{n-2} + \ldots + (a+nb)A_n = 0.$$

Cela démontre la proposition ci-dessus, et l'on voit en même temps que *entre la plus petite racine positive de la proposée et la racine négative qui la précède, ou il n'y aura pas de racines de la nouvelle équation, ou il y en aura un nombre pair.*

6. Les propositions des n^{os} 1 et 5 sont susceptibles d'une extension qui se présente d'elle-même.

Il est visible, en effet, que deux racines consécutives de l'équation

$$F(x) = 0$$

comprennent un nombre impair de racines de l'équation

$$F(x) + \varphi(x) F'(x) = 0,$$

dans laquelle $\varphi(x)$ est une fonction continue qui ne s'annule pour aucune valeur de x comprise entre une limite inférieure et une limite supérieure de toutes les racines réelles de la proposée.

On voit de même que deux racines consécutives et de même signe de $F(x) = 0$ doivent intercepter un nombre impair de racines de

$$F(x) + \psi(x) F'(x) = 0,$$

lorsque $\psi(x)$ est une fonction continue qui change de signe avec x pour toutes les valeurs de cette variable comprises entre les limites mentionnées.

Disposant convenablement de $\varphi(x)$ et de $\psi(x)$, on peut amener par là des résultats importants touchant la séparation des racines, et établir des *criteria* pour reconnaître l'existence de racines, soit réelles, soit imaginaires, d'une équation donnée.

Ainsi, dans le cas déjà considéré de $\varphi(x) = -k$, et en s'aidant de la règle des signes, on reconnaît immédiatement que *si l'équation* $F(x) = 0$ *a* m *variations de signe, et que l'équation* $F(x) - kF'(x) = 0$ (où l'on peut disposer de la constante k à volonté) *en ait un nombre* $m' < m - 1$, *la première aura au moins* $m - m' - 1$ *racines imaginaires.*