NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. DE GROSSOUVRE

Démonstration géométrique et généralisation de la même question

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 40-43

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__40_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1867, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Démonstration géométrique et généralisation de la même question;

PAR M. A. DE GROSSOUVRE,
Elève du collége Stanislas (classe de M. Gros).

Le lieu cherché est la polaire réciproque du cercle par rapport à la parabole; or, la polaire réciproque d'une courbe du second degré est une courbe du second degré; le lieu cherché est donc une courbe du second degré.

Pour déterminer cette courbe, je remarque que les tangentes du cercle ont pour pôles les points où l'enveloppe touche les polaires des points de contact.

Si l'on prend les tangentes (A) au cercle parallèles à l'axe de la parabole, les pôles de ces tangentes sont situés à l'infini sur les tangentes (B) à la parabole aux points ou cette courbe est rencontrée par les droites (A). Le lieu est donc une hyperbole. Pour avoir ses asymptotes, je considérerai ces droites comme les tangentes aux points situés à l'infini. Ces asymptotes sont donc les polaires des points où les tangentes (A) touchent le cercle, c'est-à-dire deux droites passant par le point O et parallèles aux droites (B). Par conséquent, les asymptotes sont perpendiculaires aux droites (C) qui joignent le foyer aux points où la directrice de la parabole est rencontrée par les droites (A) ; par suite, l'angle des asymptotes avec l'axe est complémentaire de l'angle des droites (C) avec l'axe, de sorte que si p et R représentent le paramètre de la parabole et le rayon du cercle, la tangente de l'angle des asymptotes avec l'axe est égale à $\frac{p}{R}$.

L'axe de la parabole est évidemment un axe de l'hyperbole; je dis, de plus, que les points M et N, où le cercle rencontre l'axe, sont les sommets de l'hyperbole. En effet, d'après une propriété connue de la parabole, le point M étant situé sur l'axe a pour polaire une droite perpendiculaire à l'axe, et rencontrant cet axe en un point symétrique du point M, par rapport au sommet de la parabole; donc ce point n'est autre chose que le point N. Donc les points M et N sont les sommets de l'hyperbole.

Dans le cas où le paramètre de la parabole est égal au rayon du cercle, l'hyperbole est équilatère.

Considérons d'une manière générale un cercle situé dans le plan de la parabole; la polaire réciproque de ce cercle, par rapport à la parabole, est une hyperbole; en effet, les tangentes (A) au cercle, parallèles à l'axe, ont pour pôles des points situés à l'infini sur les tangentes (B) à la parabole, aux points où cette courbe est rencontrée par les droites (A), et les directions des tangentes (B) sont les directions asymptotiques.

En second lieu, déterminons le centre de l'hyperbole : ce point est le point d'intersection des asymptotes, c'est-à-dire le point d'intersection des polaires des points de contact du cercle avec les tangentes (A); par suite, ce centre est le pôle de la droite qui joint les points de contact des tangentes (A) avec le cercle : cette droite étant perpendiculaire à l'axe, son pôle se trouve sur l'axe; donc, quel que soit le cercle considéré, l'hyperbole correspondante a son centre sur l'axe de la parabole, et si l'on considère différents cercles ayant leurs centres sur une même perpendiculaire à l'axe, les hyperboles correspondantes ont le même centre.

Tous les cercles précédents passent par les points circulaires de l'infini; donc toutes les hyperboles sont tangentes à un système de deux droites imaginaires parallèles à l'axe de la parabole; les points où ces droites coupent le cercle ont pour polaires des droites imaginaires conjuguées tangentes à l'hyperbole et passant par les points circulaires de l'infini; ces droites, par leurs intersections, déterminent donc les foyers de l'hyperbole.

Nous avons vu que les directions des tangentes (B) sont les directions asymptotiques; si l'on suppose que le centre du cercle se déplace sur un diamètre de la parabole, son rayon demeurant constant, les directions des asymptotes des diverses hyperboles que l'on obtiendra en prenant les polaires réciproques de ces cercles seront constamment les mêmes, et, de plus, toutes ces hyperboles seront égales; car, si l'on déplace le centre du cercle d'une certaine longueur, tous ses points décriront des droites parallèles et égales, et les polaires de ces points se déplaceront en sens contraire de la même longueur.

Note. — M. Barnède donne aussi une solution geometrique par la theorie des polaires reciproques; MM. Niebylowski et Lepage, a l'aide de la meme theorie, generalisent la question.