Nouvelles annales de mathématiques

C.-E. Page

Mouvements relatifs à la surface de la terre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 387-397

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__387_0>

MOUVEMENTS RELATIFS A LA SURFACE DE LA TERRE

(voir p. 97);

PAR M. C.-E. PAGE,
Professeur à l'Ecole d'Artillerie de Vincennes.

Mouvement d'un corps lancé verticalement de bas en haut.

Soit V la vitesse initiale. Nous aurons

$$U = 0, \quad U_1 = V.\cos\lambda, \quad U_2 = V.\sin\lambda;$$

les équations (A) deviennent

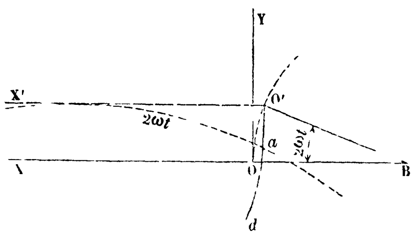
$$x = \frac{g.\cos\lambda}{4.\omega^2}(2.\omega.t - \sin 2.\omega.t) + \frac{V.\cos\lambda}{2.\omega}(\cos 2.\omega.t - 1),$$

$$y = \frac{g.\cos\lambda}{4.\omega^2}(\cos 2.\omega.t - 1) + \frac{V.\cos\lambda}{2.\omega}.\sin 2.\omega.t,$$

$$z = V.\sin\lambda.t - \frac{1}{2}.g.\sin\lambda.t^2.$$

Au moyen des deux premières, nous pouvons construire

FIG. 1.



la projection de la trajectoire relative sur le plan du parallèle.

Pour cela, prenons sur l'axe OX la distance

$$OB = -\frac{V.\cos\lambda}{2.\omega};$$

faisons tourner le rayon BO autour du point B avec la vitesse angulaire $2.\omega$, et en sens contraire du mouvement de la terre.

Au bout du temps t, les coordonnées x' et y' du point O' occupé par l'extrémité du rayon BO seront

$$x' = \frac{V.\cos\lambda}{2.\omega}.(\cos 2.\omega.t - 1), \quad y' = \frac{V.\cos\lambda}{2.\omega}.\sin 2.\omega.t.$$

Supposons que le point O' entraîne avec lui une droite O'X' assujettie à rester constamment parallèle à l'axe OX, et que la circonférence dont le rayon est égal à

$$\frac{g.\cos\lambda}{4.\omega^2}$$

roule sur cette droite O'X' avec la vitesse angulaire $2.\omega$. Un point a, fixe sur la circonférence et dont la position initiale coïncidait avec l'origine, décrit, par rapport à la droite O'X', la cycloïde O'ad. Au bout du temps t, les coordonnées du point a sont justement les mêmes que les coordonnées x et y du mobile. Donc, la courbe décrite par le point a est la projection de la trajectoire relative sur le plan du parallèle.

Cette construction donne exactement le mouvement du projectile perpendiculairement au plan du méridien. On voit qu'il est d'abord dévié vers l'ouest, qu'il atteint un écart maximum, puis qu'il revient vers le méridien et finit par passer à l'est.

Pour déterminer le temps t correspondant à l'écart maximum, il faut faire

$$\frac{dx}{dt} = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{g.\cos\lambda}{2.\omega}(1-\cos 2.\omega.t)=\text{V}.\cos\lambda.\sin 2.\omega.t,$$

d'où

$$\frac{\tan g\,\omega.t}{\omega}=\frac{2.\text{V}}{g}.$$

Tant que l'arc $\omega.t$ reste très-petit, la valeur de t ne diffère pas sensiblement de

$$t=\frac{2.\text{V}}{g};$$

c'est justement le temps que le mobile mettrait à retomber sur le plan horizontal dans l'hypothèse de l'immobilité de la terre.

L'arc $2.\omega.t$ restant toujours très-petit, on peut calculer les valeurs de x et de y en développant et négligeant les termes qui contiennent le cube de ω. On a

$$x=-\text{V}.\cos\lambda.\omega.t^2+\frac{g.\cos\lambda}{3}.\omega^2.t^3,$$

$$y=\text{V}\cos\lambda.t-\frac{1}{2}g.\cos\lambda.t^2-\frac{2}{3}\text{V}.\cos\lambda.\omega^2.t^3$$
$$+\frac{g.\cos\lambda}{2.3}.\omega^2.t^4,$$

$$z=\text{V}.\sin.\lambda.t-\frac{1}{2}g\sin\lambda.t^2.$$

En représentant par z_1 la hauteur du mobile au-dessus du plan horizontal, par y_1 la déviation dans le sens du méridien, nous aurons

$$y_1=y.\sin\lambda-z.\cos\lambda \quad \text{et} \quad z_1=y.\cos\lambda+z.\sin\lambda,$$

d'où

$$y_1=\frac{\sin\lambda.\cos\lambda.\omega^2.t^3}{2.3}(g.t-4.\text{V}),$$

$$z_1=\text{V}.t-\frac{1}{2}g.t^2+\frac{\cos^2\lambda.\omega^2.t^3}{2.3}(g.t-4.\text{V}),$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{2}{3} \cdot \sin\lambda . \cos\lambda . \omega^2 . t^2 (g . t - 3 . V),$$

$$\frac{dz_1}{dt} = V - g . t + \frac{2}{3} \cdot \cos^2\lambda . \omega^2 . t^2 (g . t - 3 . V).$$

En posant

$$\frac{dz_1}{dt} = 0,$$

nous déterminerons le temps correspondant à la plus grande hauteur. Ce temps est un peu moindre que dans l'hypothèse de l'immobilité, mais la différence est excessivement faible; elle est toujours moindre que

$$\frac{4}{3} \cdot \omega^2 . \cos^2\lambda \cdot \frac{V^2}{g^2} \cdot t = 0,0000000071 . \cos^2\lambda \cdot \frac{V^2}{g^2} \cdot t.$$

Ainsi, sous la latitude de Paris, et pour une vitesse initiale de 500 mètres, la différence serait moindre que

$$0,0000049 . 1''.$$

On peut donc sans erreur sensible prendre

$$t = \frac{V}{g}$$

pour le temps que le projectile met à monter et pour celui qu'il met à redescendre.

En mettant cette valeur de t dans l'expression de z_1, on trouve, pour la hauteur h à laquelle le projectile s'élève,

$$h = \frac{V^2}{2g}\left(1 - \omega^2 . \cos^2\lambda \frac{V^2}{g}\right);$$

en représentant par H la hauteur à laquelle il s'élèverait dans l'hypothèse de l'immobilité, on a

$$\begin{aligned} h &= H (1 - \omega^2 . \cos^2\lambda . 2 . H) \\ &= H (1 - 0,00000010658 . \cos^2\lambda . H). \end{aligned}$$

On voit que la différence est tout à fait insignifiante.

L'expression de y_1 fait voir que, parallèlement au plan méridien, la déviation a lieu vers le nord, non-seulement pendant tout le temps que le projectile reste au-dessus du plan horizontal, mais encore lorsqu'il est tombé au-dessous de ce plan et pendant un temps justement égal à celui pendant lequel il est resté au-dessus.

Au point le plus élevé, la déviation vers le nord est

$$\frac{4}{3}\cdot\omega^2.\sin\lambda.\cos\lambda\cdot\frac{H^2}{g};$$

elle devient double quand le projectile retombe sur le plan horizontal.

Si, dans l'expression

$$x = -\frac{\cos\lambda.\omega.t^2}{3}(3.V - g.t),$$

on fait

$$V = gt,$$

on trouve pour la déviation d, correspondant au point le plus élevé,

$$d = -\frac{2}{3}\cdot g.\cos\lambda.\omega.t^3 = -\frac{4}{3}\cdot\omega\cos\lambda.H\cdot\sqrt{\frac{2.H}{g}}.$$

Cette déviation devient double quand le projectile retombe sur le plan horizontal.

En résumé, quand un projectile est lancé verticalement de bas en haut, son mouvement vertical ne diffère pas sensiblement de celui qui aurait lieu dans l'hypothèse de l'immobilité de la terre. La déviation parallèlement au méridien est dirigée vers le nord, mais elle est à peine appréciable; la déviation perpendiculaire au méridien et dirigée vers l'ouest est seule assez sensible.

Sous la latitude de Paris, un corps lancé verticalement avec une vitesse de 200 mètres s'élèverait à une hauteur de 2039 mètres, bien entendu en supposant la résistance de l'air nulle, et viendrait retomber sur le plan horizontal du côté de l'ouest, à la distance de $3^{m},0515$ du point de départ.

Mouvement d'un corps lancé suivant une direction quelconque.

Reprenons les équations générales

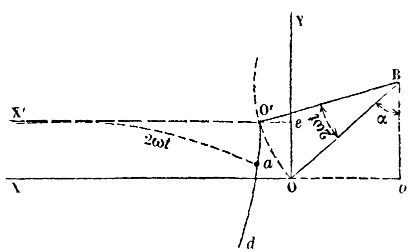
$$x = \frac{g.\cos\lambda}{4.\omega^2}(2.\omega.t - \sin 2.\omega.t) + \frac{U}{2.\omega}.\sin 2.\omega.t$$
$$+ \frac{U_1}{2.\omega}(\cos 2.\omega.t - 1),$$

$$y = \frac{g.\cos\lambda}{4\,\omega^2}(\cos 2.\omega.t - 1) + \frac{U_1}{2.\omega}.\sin 2.\omega.t$$
$$- \frac{U}{2.\omega}(\cos 2.\omega.t - 1),$$

$$z = U_2.t - \frac{1}{2}g.\sin\lambda.t^2.$$

Au moyen des deux premières, nous pouvons construire la projection de la trajectoire relative sur le plan du parallèle. Soit V_1 la composante de la vitesse initiale dans

Fig. 2.



ce plan. Par le point O menons la droite OB perpendiculaire à la direction de la vitesse V_1 et dirigée vers la droite de cette vitesse; prenons

$$OB = \frac{V}{2.\omega};$$

les coordonnées du point B sont

$$Ob = \frac{U_1}{2.\omega} \quad \text{et} \quad bB = \frac{U}{2.\omega}.$$

Faisons tourner le rayon BO autour du point B avec la vitesse angulaire $2.\omega$ et en sens contraire du mouvement de la terre.

Au bout du temps t, les coordonnées du point O′ occupé par l'extrémité du rayon BO seront

$$O'e = \frac{U}{2.\omega}\cdot \sin 2.\omega.t + \frac{U_1}{2.\omega}\cdot (\cos 2.\omega.t - 1),$$

$$Oe = \frac{U_1}{2.\omega}\cdot \sin 2.\omega.t - \frac{U}{2.\omega}\cdot (\cos 2.\omega.t - 1).$$

En effet,

$$O'e = OB.\sin(\alpha + 2.\omega.t) - OB.\sin\alpha,$$

$$Oe = OB.\cos\alpha - OB.\cos(\alpha + 2.\omega.t),$$

et

$$OB.\sin\alpha = \frac{U_1}{2.\omega}, \quad OB.\cos\alpha = \frac{U}{2\ \omega}.$$

En tournant autour du point B, l'extrémité du rayon BO entraîne dans son mouvement la droite O′X′ assujettie à rester constamment parallèle à l'axe OX, et la circonférence dont le rayon est

$$\frac{g.\cos\lambda}{4.\omega^2}$$

roule sur la droite O′X′ avec la vitesse angulaire 2ω. Un point a, fixe sur cette circonférence et dont la position initiale coïncidait avec l'origine, décrit la cycloïde O′ad par rapport à la droite mobile O′X′. Au bout du temps t, les coordonnées du point a sont les mêmes que les coordonnées du mobile; donc le point a, dans son mouvement, décrit la projection de la trajectoire relative sur le plan du parallèle.

Cette construction donne exactement le mouvement du projectile perpendiculairement au plan du méridien. Pour avoir le mouvement dans le sens du méridien, il faudrait construire la projection de la trajectoire relative sur le plan horizontal; on en déduirait la discussion complète du problème, mais cette discussion rigoureuse serait extrêmement longue. On obtient une exactitude bien suffisante en développant en série et négligeant les termes qui contiennent le carré de ω. On a

$$x = \mathrm{U}\,t - \mathrm{U}_1.\omega.t^2 + \frac{1}{3}\cdot g.\cos\lambda.\omega.t^3,$$

$$y = \mathrm{U}_1.t + \mathrm{U}.\omega\,t^2 - \frac{1}{2}\cdot g.\cos\lambda.t^2,$$

$$z = \mathrm{U}_2.t - \frac{1}{2}\cdot g.\sin\lambda.t^2.$$

En représentant par :

V la vitesse initiale;

φ l'angle de tir, c'est-à-dire l'angle que la direction de la vitesse initiale fait avec le plan horizontal;

a l'angle que le plan de tir fait avec le plan méridien, cet angle étant compté de droite à gauche, on a

$$\mathrm{U} = \mathrm{V}.\cos\varphi.\sin a,$$
$$\mathrm{U}_1 = \mathrm{V}.\cos\varphi.\cos a.\sin\lambda + \mathrm{V}.\sin\varphi.\cos\lambda,$$
$$\mathrm{U}_2 = \mathrm{V}.\sin\varphi.\sin\lambda - \mathrm{V}.\cos\varphi.\cos a.\cos\lambda.$$

En transformant les axes et prenant :

L'axe OZ_1 dirigé suivant la verticale en sens contraire de la pesanteur;

L'axe OY_1 dirigé suivant la trace horizontale du plan de tir, dans le sens de la vitesse $V\cos\varphi$;

L'axe OX_1 à gauche du plan de tir,

On a

$$\begin{aligned} x_1 &= x.\cos a - y.\sin a.\sin\lambda + z.\sin a.\cos\lambda, \\ y_1 &= x.\sin a + y.\sin\lambda.\cos a - z.\cos\lambda.\cos a, \\ z_1 &= y.\cos\lambda + z.\sin\lambda; \end{aligned}$$

par suite,

$$x_1 = \omega.t^2.\frac{\cos a.\cos\lambda}{3}(g.t - 3.V.\sin\varphi) - \omega.t^2.V.\cos\varphi.\sin\lambda,$$

$$y_1 = V.\cos\varphi.t + \omega.t^2.\frac{\sin a.\cos\lambda}{3}(g.t - 3.V.\sin\varphi),$$

$$z_1 = V.\sin\varphi.t + \frac{t^2}{2}(2.\omega.V.\cos\varphi.\cos\lambda.\sin a - g).$$

En posant $z_1 = 0$, nous déterminerons la durée t_1 correspondant à la portée horizontale. On trouve

$$t_1 = \frac{2.V.\sin\varphi}{(g - 2.\omega.V.\cos\varphi.\sin a.\cos\lambda)}.$$

Quand le tir est dirigé dans le sens du méridien,

$$\sin a = 0;$$

par conséquent, la durée du trajet est exactement la même que dans l'hypothèse de l'immobilité de la terre.

Cette durée est un peu augmentée quand le tir est dirigé vers l'est et un peu diminuée quand il est dirigé vers l'ouest; mais, dans tous les cas, la différence est très-faible, de sorte qu'on peut sans erreur sensible prendre

$$t_1 = \frac{2.V.\sin\varphi}{g}$$

pour la durée du trajet correspondant à la portée horizontale.

En mettant cette valeur dans l'expression de y_1, on voit que, suivant la direction méridienne, la portée horizontale est la même que dans l'hypothèse de l'immobilité, et qu'elle est un peu augmentée ou diminuée suivant que le tir est dirigé vers l'ouest ou vers l'est.

Pour déterminer l'écart perpendiculaire au plan de tir correspondant à la portée horizontale, il faut mettre la valeur de t_1 dans l'expression de x_1; en représentant l'écart par D, on a

$$D = -\frac{4}{3}\cdot\omega.\cos\lambda\cdot\frac{V^3\ \sin^3\varphi}{g^2}\left(\frac{3.\text{tang}\lambda}{\text{tang}\varphi}+\cos a\right).$$

Tant que tang φ reste moindre que 3.tangλ, la quantité entre parenthèses ne peut pas être rendue négative; par conséquent la valeur de D reste négative, ce qui fait voir que l'écart latéral a lieu à droite du plan de tir. Cet écart atteint sa plus grande valeur pour $\cos a = +1$, c'est-à-dire quand le tir est dirigé dans le plan méridien et du nord au sud; il devient un minimum, quand le tir est dirigé du sud au nord.

Lorsque tangφ devient plus grand que 3.tangλ, on peut déterminer les valeurs négatives de cos a qui rendent négative la quantité entre parenthèses; la déviation latérale se fait, dans ce cas, à gauche du plan de tir.

Sous l'équateur, la valeur de D devient

$$D = -\frac{4}{3}\cdot\omega\cdot\frac{V^3.\sin^3\varphi}{g^2}\cdot\cos a,$$

ce qui fait voir que la déviation a lieu vers la droite quand le tir est dirigé du nord au sud; qu'elle a lieu vers la gauche quand le tir est dirigé du sud au nord, et enfin qu'elle est nulle quand le tir est perpendiculaire au méridien.

En supposant la latitude de 45 degrés, l angle de tir de

45 degrés, la vitesse initiale de 500 mètres, on trouve, en faisant la résistance de l'air nulle, que la portée horizontale serait de 25484 mètres; que la déviation à droite serait de $25^{m},20$ dans le cas où le tir serait dirigé dans le plan méridien et du nord vers le sud; que cette déviation à droite ne serait que de $12^{m},60$ dans le cas où le tir serait dirigé du sud vers le nord.

Limite de l'écart latéral en tenant compte de la résistance de l'air.

Dans tout ce qui précède, nous avons fait abstraction de la résistance de l'air. Lorsqu'on veut tenir compte de cette résistance, les calculs deviennent beaucoup plus compliqués; nous nous bornerons à indiquer la limite des écarts latéraux.

La résistance de l'air tend toujours à diminuer la vitesse du projectile; de sorte que pour le même angle de tir, pour la même vitesse initiale et au bout du même temps, le chemin parcouru suivant une direction quelconque est nécessairement moindre dans l'air qu'il ne le serait dans le vide.

L'expression

$$x_1 = -\omega . t^2 \left[\mathrm{V} . \cos\varphi . \sin\lambda + \frac{\cos a . \cos\lambda}{3} (3 . \mathrm{V} . \sin\varphi - g . t) \right]$$

donne le chemin parcouru par le projectile perpendiculairement au plan de tir, au bout du temps t, dans l'hypothèse du vide. L'écart latéral calculé au moyen de cette formule est donc supérieur à celui qui a lieu dans l'air au bout du même temps. Comme la composante de la résistance perpendiculaire au plan de tir est toujours très-faible, l'écart calculé ne diffère pas beaucoup de l'écart réel.