A. Laisant

Note sur la somme des n premiers produits de p nombres entiers consécutifs

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 366-367

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__366_1>

NOTE SUR LA SOMME DES n PREMIERS PRODUITS DE p NOMBRES ENTIERS CONSÉCUTIFS;

PAR M. A. LAISANT,
Officier du genie.

Considérons les produits

$$1.2\ldots p,\quad 2.3\ldots(p+1),\quad 3.4\ldots(p+2),\ldots,$$
$$n(n+1)(n+p-1).$$

Il s'agit de trouver une formule donnant la somme de tous ces termes.

Considérant d'abord les deux premiers, nous avons

$$1.2\ldots p+2.3\ldots(p+1)$$
$$=2.3\ldots(p+1)\left(\frac{1}{p+1}+1\right)=\frac{2.3\ldots(p+1)(p+2)}{(p+1)}.$$

La somme des trois premiers produits s'obtiendra en ajoutant le troisième produit à la somme précédente. Ainsi nous aurons

$$\begin{aligned}
&1.2\ldots p + 2.3\ldots(p+1) + 3.4\ldots(p+2)\\
&= \frac{2.3\ldots(p+1)(p+2)}{(p+1)} + 3.4\ldots(p+2)\\
&= 3.4\ldots(p+2)\left(\frac{2}{p+1}+1\right) = \frac{3.4\ldots(p+2)(p+3)}{p+1}.
\end{aligned}$$

On verrait de même que la somme des quatre premiers produits est $\frac{4.5.6\ldots(p+4)}{p+1}$; celle des cinq premiers, $\frac{5.6\ldots(p+5)}{p+1}$. En général, il suffira, pour obtenir la somme demandée, d'ajouter au terme auquel on s'arrête un nouveau facteur, en suivant l'ordre consécutif des nombres entiers, et de diviser par $(p+1)$. Pour faire ressortir la généralité de cette loi, supposons-la vraie pour la somme des $(n-1)$ premiers termes, et nous l'établirons pour celle des n premiers.

Ainsi, par hypothèse,

$$\begin{aligned}
&1.2\ldots p + \ldots + (n-1)n(n+1)\ldots(n+p-2)\\
&= \frac{(n-1)n(n+1)\ldots(n+p-1)}{p+1};
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&1.2\ldots p + \ldots + (n-1)n\ldots(n+p-2)\\
&\quad + n(n+1)\ldots(n+p-1)\\
&= n(n+1)\ldots(n+p-1)\left(\frac{n-1}{p+1}+1\right)\\
&= \frac{n(n+1)\ldots(n+p)}{p+1}.
\end{aligned}$$

Ce qui prouve bien que la formule est générale (*).

(*) Un calcul semblable donne la limite de la somme des termes de la