Nouvelles annales de mathématiques

Breton de Champ

Sur les forces centrifuges mises en usage par Poinsot dans sa théorie de la rotation des corps

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 362-366

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__362_1>

SUR LES FORCES CENTRIFUGES

Mises en usage par Poinsot dans sa Théorie de la rotation des corps (*);

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

Les théorèmes si remarquables sur la rotation des corps, que Poinsot a fait connaître en 1834, ont pris place dans les Traités de mécanique publiés depuis cette époque. Mais pour les démontrer on a recours à l'ancienne méthode analytique plus ou moins simplifiée, et non à celle de l'éminent géomètre. On sait d'ailleurs que cette der-

(*) Cet article est le résumé d'une communication faite à la réunion des Sociétés savantes (sect. des Sciences, 1re Commission) le 23 avril 1867.

nière a donné lieu à des objections, et que l'on a été jusqu'à supposer qu'elle ne pouvait avoir conduit à des résultats exacts que par suite de quelque compensation d'erreurs (*).

Malgré la réponse qui a été faite à ces objections (**), je pense qu'il peut y avoir, aujourd'hui encore, quelque utilité à rechercher comment la nouvelle doctrine a pu n'être pas comprise et de quelle manière elle doit être entendue.

Ce qui n'a pas été compris, c'est la nature et le rôle des forces centrifuges que Poinsot fait intervenir, et qui ne sont pas les mêmes que dans l'ancienne théorie.

Il nous suffira de considérer ici le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. Poinsot démontre par la Géométrie que ce mouvement a lieu, nécessairement, comme si le corps était attaché à un cône ayant son sommet au point fixe, qui roulerait, sans glisser, sur un autre cône de même sommet, fixe dans l'espace. C'est, on peut le dire, cette image même de la rotation du corps qui a donné lieu à un malentendu dans la partie dynamique de la question.

Dans la méthode analytique, pour déterminer la loi de ce mouvement, on considère que les forces capables de faire parcourir à chaque molécule dm l'espèce de roulette sphérique qu'elle décrit, peuvent se réduire à deux, savoir : une force centripète $-\frac{u^2}{\rho}dm$ dirigée vers le centre de courbure de cette trajectoire, et une force tangentielle $\frac{du}{dt}dm$, en appelant u la vitesse de cette molécule à l'époque t du mouvement et ρ le rayon de courbure. (Lorsqu'on

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1re série, t. XV, p. 63-76; 1856

(**) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1re série, t. XV, p. 187-190; 1856.

rapporte le système à trois axes rectangulaires ox, oy, oz, la résultante de ces deux forces a pour composantes, suivant ces trois axes, $\frac{d^2x}{dt^2}dm$, $\frac{d^2y}{dt^2}dm$, $\frac{d^2z}{dt^2}dm$.) On suppose que cette force centripète et cette force tangentielle soient appliquées à la molécule dm pour la mouvoir, et on applique au corps, sur cette même molécule, une force centrifuge $+\frac{u^2}{\rho}dm$, et une force tangentielle $-\frac{du}{dt}dm$. L'ensemble de ces dernières forces, pour toutes les molécules du corps, doit par conséquent faire équilibre aux forces extérieures, et cette condition, qui est le principe même de d'Alembert, donne immédiatement les équations du problème (*).

Poinsot fait intervenir d'autres forces centrifuges. Il applique à chaque molécule dm une force centripète $-\frac{u^2}{r}dm$, r étant la distance de cette molécule à la ligne de contact des deux cônes, qui est l'axe *instantané* de rotation; et il applique en sens contraire une force $+\frac{u^2}{r}dm$, qu'il appelle la force centrifuge *née* de la rotation du corps autour de cet axe (**). Ces forces centri-

(*) Dans le cas d'un corps abandonné à lui-même, les forces centrifuges $+\frac{u^2}{\rho}dm$ et les forces tangentielles $-\frac{du}{dt}dm$ se font équilibre, et par conséquent les forces centrifuges sont alors absolument incapables d'imprimer au corps quelque mouvement que ce soit. Si l'on ne tenait pas compte des forces tangentielles, on serait conduit à des conséquences singulières dont j'ai moi-même donné un exemple dans le *Journal de Mathématiques* de M. Liouville (1re série, t. V, p. 120-145; 1840) sans désigner expressément le travail auquel je fais allusion, mais en appelant l'attention sur la nature paradoxale de ces conséquences en termes assez explicites pour que l'on ne pût supposer que je prétendais les démontrer.

(**) *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, 1re série, t. XVI, p. 81; 1851.

fuges, jointes aux forces extérieures, impriment au corps une rotation infiniment petite, laquelle se compose avec l'axe de la rotation actuelle autour de l'axe instantané et fait varier l'axe et la grandeur de cette rotation. De sorte que, si l'on regarde le corps comme sollicité à chaque instant par ces seules forces, savoir les forces centrifuges qui viennent d'être définies et les forces extérieures, on devra arriver ainsi aux équations du mouvement. Et, en effet, on arrive sur-le-champ, de cette manière, aux équations d'Euler (*).

Poinsot raisonne comme si la chose était évidente. Les objections qui se sont produites, et l'hésitation des auteurs à énoncer un principe aussi simple, prouvent qu'une explication n'aurait pas été superflue.

La difficulté provient de ce que l'on suppose qu'il s'agit du mouvement même sans lequel le cône mobile *roule* sur le cône fixe; tandis que les forces introduites impliquent la décomposition de ce mouvement en deux autres.

Les forces centripètes $-\frac{u^3}{r}dm$ sont celles qui seraient nécessaires pour faire tourner le corps autour de la ligne de contact des deux cônes. Par conséquent il faut concevoir que de l'époque t à l'époque $t+dt$ le cône mobile tourne autour de cette ligne, *sans rouler sur le cône fixe*, qu'il devient *sécant*, et qu'en même temps il est ramené au contact, par l'effet des forces $\frac{u^2}{r}dm$ et des forces extérieures, suivant la ligne qui répond à l'époque $t+dt$, puisque telle serait alors la position de ce cône par l'effet des forces extérieures seules, sans l'adjonction des forces égales et contraires $-\frac{u^2}{r}dm$, $+\frac{u}{r}dm$. La rotation due

(*) *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, 1re série, t. XVI, p. 123-124; 1851.

aux forces centripètes est *uniforme*, et par suite il n'est pas besoin d'y faire intervenir des forces tangentielles comme dans la méthode rappelée ci-dessus, ni aucune autre force accélératrice. De sorte que les forces $+\frac{u^2}{r}\,dm$ et les forces extérieures sont en effet les seules forces accélératrices dont on ait à tenir compte pour déterminer la loi du mouvement.

On voit par là que les forces centrifuges de Poinsot ne sont pas celles qui naissent du mouvement tel qu'il le dépeint, mais celles qui animeraient les molécules du corps si le cône mobile, au lieu de continuer à rouler sur le cône fixe après l'époque t du mouvement, se mettait à tourner autour de la ligne de contact répondant à cette époque.