Nouvelles annales de mathématiques

Ch. Forestier

Discussion de l'équation qui donne les plans principaux d'une surface du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 355-358

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__355_0>

DISCUSSION DE L'ÉQUATION
Qui donne les plans principaux d'une surface du second degré;

PAR M. CH. FORESTIER,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Toulouse.

On sait que les équations suivantes déterminent la direction des cordes principales et les plans diamétraux principaux de la surface

$$\begin{gathered} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0: \end{gathered}$$

$$(A - S)\alpha + B''\beta + B'\gamma = 0,$$
$$B''\alpha + (A' - S)\beta + B\gamma = 0,$$
$$B'\alpha + B\beta + (A'' - S)\gamma = 0,$$
$$\begin{gathered} (S - A)(S - A')(S - A'') - B^2(S - A) \\ - B'^2(S - A') - B''^2(S - A'') - 2BB'B'' = 0, \end{gathered}$$
$$S[\alpha x + \beta y + \gamma z] + C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0.$$

Supposons d'abord qu'aucun des coefficients B, B', B'' ne soit nul.

I.

L'équation en S a ses trois racines réelles.

Cette équation peut s'écrire :

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &(S - A'')[(S - A)(S - A') - B''^2] \\ &\quad - B^2(S - A) - B'^2(S - A') - 2BB'B'' = 0. \end{aligned} \right.$$

Prenons l'équation auxiliaire

$$(2) \qquad (S - A)(S - A') - B''^2 = 0.$$

Elle a ses racines réelles, l'une inférieure et l'autre supérieure à A et A′. Désignons-les par a et b, et soit $a < b$.

Pour une valeur de S tirée de (2), on a

$$S - A' = \frac{B''^2}{S - A},$$

et le résultat de la substitution dans (1) se réduit à

$$-\frac{1}{S - A}[B(S - A) + B'B'']^2,$$

de sorte que pour $S = a$, le résultat est positif, et pour $S = b$, négatif. Les quatre quantités $-\infty$, a, b, $+\infty$ séparent les trois racines de l'équation (1) (*).

II.

Conditions pour que l'équation en S *ait deux racines égales.*

Les conditions nécessaires et suffisantes sont que l'une des racines de l'équation auxiliaire soit racine de l'équa-

(*) Cet ingénieux moyen de séparer les racines de l'équation en s et d'établir leur réalité est dû, comme on sait, à M. Cauchy. En modifiant un peu la démonstration, M. Forestier l'a encore simplifiée, particulièrement en ce qui concerne les conditions de l'égalité de deux des racines. Les coefficients d'une équation dont deux racines ont la même valeur ne sont assujettis qu'à remplir une seule condition qui est pour le troisième degré

$$\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix} = 0,$$

en désignant, d'une manière générale, par S_m la somme des $m^{ièmes}$ puissances des racines. Mais, dans le cas actuel, cette équation de condition se décompose en deux autres (*voir* l'article de M. Mathieu, p. 177).

G.

tion (1) et de sa dérivée; ce qui donne immédiatement

$$B(S-A)+B'B''=0,$$
$$(S-A)(S-A')-B''^2=0,$$
$$(S-A'')[(S-A)+(S-A')]-B^2-B'^2=0.$$

D'où l'on déduit

$$S=A-\frac{B'B''}{B}=A'-\frac{BB''}{B'}=A''-\frac{BB'}{B''}.$$

III.

Lorsqu'on porte dans les trois équations en α, β, γ une valeur de S, racine double de l'équation (1), ces trois équations se réduisent à une seule qui est

$$\frac{\alpha}{B}+\frac{\beta}{B'}+\frac{\gamma}{B''}=0.$$

La surface a une infinité de cordes principales parallèles à un même plan et une infinité de plans principaux. On montre que tous ces plans se coupent suivant une même droite, et que la surface est de révolution autour de cette droite. Mais si l'on porte dans ces trois équations une valeur de S, racine simple de l'équation (1), elles se réduisent à deux distinctes, qui déterminent une direction de cordes principales. En effet, si elles devenaient identiques, on aurait

$$\frac{A-S}{B''}=\frac{B''}{A'-S}=\frac{B'}{B},\quad \frac{A-S}{B'}=\frac{B''}{B}=\frac{B'}{A''-S},$$

d'où

$$S=A-\frac{B'B''}{B}=A'-\frac{BB''}{B'}=A''-\frac{BB'}{B''}.$$

Donc cette valeur de S serait racine double, ce qui est contre l'hypothèse.

IV.

Lorsque $B'' = 0$, la discussion se fait avec plus de facilité.

L'équation (1) se réduit à

$$(3)\quad (S-A)(S-A')(S-A'') - B^2(S-A) - B'^2(S-A') = 0,$$

et l'équation auxiliaire à $(S-A)(S-A') = 0$, soit $A < A'$.

Les quatre quantités $-\infty$, A, A', $+\infty$ séparent les trois racines de l'équation (3).

Pour que l'équation (3) ait deux racines égales, comme dans le premier cas, il faut et il suffit que l'une des racines de l'équation auxiliaire soit racine double de (3). Or, le résultat de la substitution de $S = A$ est

$$-B'^2(A-A'), \quad \text{d'où} \quad B' = 0 \quad \text{ou} \quad A = A'.$$

Prenons la première hypothèse $B' = 0$. L'équation (3) se réduit à

$$(S-A)[(S-A')(S-A'') - B^2] = 0.$$

Donc, pour que $S = A$ soit racine double, il faut

$$B^2 = (A-A')(A-A'').$$

En prenant la seconde hypothèse, $A = A'$, l'équation (3) devient

$$(S-A)[(S-A)(S-A'') - B^2 - B'^2] = 0,$$

et pour que A soit racine double, il faut

$$B = 0, \quad B' = 0.$$

Les autres points de la discussion s'établissent ensuite avec la même facilité.