NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 34-40

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__34_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1867, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 780

(voir 2ᵉ série, tome V, page 479);

PAR M. LAISANT,
Officier du génie.

Soient m *un nombre pair, et l'équation*

$$A_0 x^m - A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} - \ldots - A_{m-1} x + A_m = 0,$$

où $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_m$ *sont des nombres positifs.*

Soient H *le plus grand des rapports*

$$\frac{A_1}{A_0}, \quad \frac{A_3}{A_2}, \quad \frac{A_5}{A_4}, \ldots, \quad \frac{A_{m-1}}{A_{m-2}},$$

et h *le plus petit des rapports*

$$\frac{A_2}{A_1}, \quad \frac{A_4}{A_3}, \quad \frac{A_6}{A_5}, \ldots, \quad \frac{A_m}{A_{m-1}};$$

l'équation proposée aura toutes ses racines comprises entre H *et* h *si l'on a* $H > h$, *et toutes ses racines imaginaires si l'on a* $H = h$ *ou* $< h$. P.

Je réunis les termes $A_0 x^m$ et $A_1 x^{m-1}$ en mettant $A_0 x^{m-1}$ en facteur; je procède d'une façon analogue pour tous les autres groupes de deux termes consécutifs, si bien que l'équation s'écrit

$$A_0 x^{m-1}\left(x - \frac{A_1}{A_0}\right) + A_2 x^{m-3}\left(x - \frac{A_3}{A_2}\right) + \ldots$$
$$+ A_{m-2} x \left(x - \frac{A_{m-1}}{A_{m-2}}\right) + A_m = 0.$$

Sous cette forme, il est évident que la plus grande valeur H de $\frac{A_1}{A_0}$, $\frac{A_3}{A_2}$, ... est une limite supérieure des racines de l'équation, puisque toute valeur de x supérieure à H rend le premier membre positif.

De même j'écris l'équation sous cette autre forme :

$$A_0 x^m - A_1 x^{m-2}\left(x - \frac{A_2}{A_1}\right) - A_3 x^{m-4}\left(x - \frac{A_4}{A_3}\right) - \ldots - A_{m-1}\left(x - \frac{A_m}{A_{m-1}}\right) = 0.$$

Toute valeur de x plus petite que la plus petite des valeurs de $\frac{A_2}{A_1}$, $\frac{A_4}{A_3}$, ..., rend le premier membre positif. Donc h est une limite inférieure des racines.

Donc, si $H > h$, toutes les racines réelles de l'équation seront comprises entre ces deux valeurs, si $H < h$, il n'y aura pas une seule racine réelle; et si $H = h$, il en sera de même, car le résultat de la substitution de H ou de h dans le premier membre est certainement positif.

Note. — Autres solutions de MM. Graindorge; Bodemer, professeur au collége de Mulhouse; Maffiotti, élève de M. Genocchi; Besson, élève du lycée de Besançon; Touren, maître répétiteur au lycée de Grenoble.

Question 781

(voir 2e série, t. V, p. 480);

PAR M. LAISANT,
Officier de génie.

ÉNONCÉ RECTIFIÉ. — *Soient m un nombre impair, et l'équation*

$$A_0 x^m - A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} - \ldots + A_{m-1} x - A_m = 0,$$

où A_0, A_1,..., A_m *sont des nombres positifs.*

Soient H *le plus grand et* H′ *le plus petit des rapports*

$$\frac{A_1}{A_0},\ \frac{A_3}{A_2},\ \frac{A_5}{A_4},\ldots,\ \frac{A_m}{A_{m-1}}.$$

Soit h le plus petit des rapports

$$\frac{A_2}{A_1},\ \frac{A_4}{A_3},\ldots,\ \frac{A_{m-1}}{A_{m-2}};$$

l'équation n'a aucune racine supérieure à H, *ni inférieure à* H′, *et en outre elle ne peut en avoir qu'une seule inférieure à* $\frac{h}{2}$. *Il en résulte que si* $H = \frac{h}{2}$ *ou* $< \frac{h}{2}$, *l'équation n'aura qu'une racine réelle.*

Pour prouver ce que j'avance, j'écris l'équation ainsi :

$$A_0 x^{m-1}\left(x - \frac{A_1}{A_0}\right) + A_2 x^{m-3}\left(x - \frac{A_3}{A_2}\right) + \ldots$$
$$+ A_{m-1}\left(x - \frac{A_m}{A_{m-1}}\right) = 0.$$

Si je remplace x par H ou une valeur plus grande, le premier membre sera toujours positif; par H′ ou une valeur plus petite, il sera constamment négatif (les valeurs positives de x sont seules en question, car l'équation n'a évidemment pas de racine négative). Donc toutes les racines sont comprises entre H′ et H.

De plus, il faut montrer qu'au-dessous de $\frac{h}{2}$ il ne peut y avoir qu'une seule racine. Pour cela je considère l'équation dérivée

$$mA_0 x^{m-1} - (m-1)A_1 x^{m-2} + (m-2)A_2 x^{m-3} - \ldots$$
$$- 2A_{m-2}x + A_{m-1} = 0.$$

Pour avoir une limite inférieure des racines de cette équation, il suffit, d'après le théorème précédent (question 780), de prendre le plus petit des rapports

$$\frac{m-2}{m-1}\frac{A_2}{A_1},\quad \frac{m-4}{m-3}\frac{A_4}{A_3},\ldots,\quad \frac{1}{2}\frac{A_{m-1}}{A_{m-2}}.$$

A plus forte raison pourrai-je prendre la plus petite des quantités suivantes :

$$\frac{1}{2}\frac{A_2}{A_1},\quad \frac{1}{2}\frac{A_4}{A_3},\ldots,\quad \frac{1}{2}\frac{A_{m-1}}{A_{m-2}},$$

pour limite inférieure. Or la plus petite de ces quantités est évidemment $\frac{1}{2}h$. Ainsi, la dérivée n'a pas de racine inférieure à $\frac{h}{2}$; il en résulte nécessairement que l'équation proposée n'en a pas plus d'une au-dessous de cette valeur.

Cette racine inférieure à $\frac{h}{2}$ ne peut d'ailleurs exister que dans le cas où $\frac{h}{2}$ surpasse H', et c'est entre ces deux dernières valeurs qu'on devra la rechercher s'il y a lieu.

Question 788

(voir 2e série, t. V, p. 528);

PAR M. GAYOU,
Candidat à l'École Normale.

x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 désignant les racines, prises dans un ordre quelconque, de l'équation

$$x^5+px^3+qx^2+rx+s=0,$$

on a

$$\begin{aligned}&x_1^2(x_4x_5+x_5x_2+x_2x_3)+x_2^2(x_5x_1+x_1x_3+x_3x_4)\\&+x_3^2(x_1x_2+x_2x_4+x_4x_5)+x_4^2(x_2x_3+x_3x_5+x_5x_1)\\&\qquad+x_5^2(x_3x_4+x_4x_1+x_1x_2)=-2r.\end{aligned}$$

(S. REALIS.)

Le premier membre de l'égalité qu'il s'agit de démontrer peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}&x_1 x_4 x_5 (x_1 + x_4 + x_5) + x_1 x_2 x_5 (x_1 + x_2 + x_5)\\ &+ x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) + x_2 x_3 x_4 (x_2 + x_3 + x_4)\\ &+ x_3 x_4 x_5 (x_3 + x_4 + x_5).\end{aligned}$$

Or, dans l'équation, le coefficient de x^4 est nul ; donc

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0,$$

et, par suite, on peut remplacer la somme précédente par la suivante :

$$\begin{aligned}&- x_1 x_4 x_5 (x_2 + x_3) - x_1 x_2 x_5 (x_3 + x_4) - x_1 x_2 x_3 (x_4 + x_5)\\ &- x_2 x_3 x_4 (x_1 + x_5) - x_3 x_4 x_5 (x_1 + x_2).\end{aligned}$$

En effectuant les calculs, et réduisant les termes semblables, on obtient l'identité

$$\begin{aligned}- 2 (x_1 x_2 x_4 x_5 &+ x_1 x_3 x_4 x_5 + x_1 x_2 x_3 x_5\\ &+ x_1 x_2 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 x_5) = -2r.\end{aligned}$$

Note. — La même question a été résolue, à peu près de la même manière, par MM. Laisant, officier du génie; J. Palmade, élève du lycée Napoléon; Louis Mallet, Alfred Giard, du lycée de Douai; Vaison, du lycée Saint-Louis; A. Chauliac, du lycée de Bordeaux; Barnèdes, du lycée Charlemagne; J. Chérot, du lycée Napoléon; A. Soudan et H. Vivarez, de Sainte-Barbe; H. Nouaux, de l'École Sainte-Geneviève; Annequin, du lycée de Grenoble. M. J. Fretz, élève de l'École Polytechnique de Zurich, donne une propriété analogue pour une équation d'un degré quelconque, mais l'énoncé en est trop long pour pouvoir trouver place ici.

Question 789

(voir 2e série, t. V, p. 528);

PAR M. H. NOUAUX,

Élève de l'École Sainte-Geneviève (classe du P. Joubert).

On donne une parabole et un cercle ayant pour centre le sommet de la parabole. Chaque point de la pa-

rabole étant pris comme pôle, on trace la polaire correspondante. Déterminer l'enveloppe de cette droite.

(LAISANT.)

Je prends pour axe des ordonnées la tangente au sommet de la parabole, et pour axe des abscisses l'axe de la parabole. L'équation de la polaire d'un point (x_1, y_1) sera

$$yy_1 = p(x + x_1). \tag{1}$$

Ce point étant sur le cercle, ses coordonnées doivent vérifier l'équation du cercle; donc

$$x_1^2 + y_1^2 = R^2. \tag{2}$$

Appliquant la méthode générale pour trouver l'enveloppe d'une droite, je considère y_1 comme une fonction de x_1, et je prends les dérivées par rapport à x_1 des équations (1) et (2); on a

$$yy'_1 = p,$$

$$y_1y'_1 + x_1 = 0.$$

y'_1 désignant la dérivée de y_1 par rapport à x_1, on a

$$y'_1 = \frac{p}{y};$$

donc

$$py_1 + yx_1 = 0. \tag{3}$$

Pour avoir l'équation de la courbe enveloppe, il suffit d'éliminer x_1 et y_1 entre les équations (1), (2) et (3); or, les équations (1) et (3) étant du premier degré, par rapport à x_1 et y_1, on en conclut

$$y_1 = \frac{pxy}{p^2 + y^2}, \quad x_1 = -\frac{p^2 x}{p^2 + y^2};$$

on aura donc

$$p^2 x^2 y^2 + p^4 x^2 = R^2 (p^2 + y^2)^2,$$

ou, supprimant le facteur $p^2 + y^2$,

$$p^2 x^2 = R^2 (p^2 + y^2),$$

hyperbole ayant pour axe transverse le diamètre du cercle, et dont l'autre axe est le double du paramètre de la parabole.

Note. — Solutions analogues de MM. Soudan et Vivarez, de Sainte-Barbe; Pellet, du lycée de Nîmes; Chérot, du lycée Napoléon; Chauliac, du lycée de Bordeaux; A. Violet, du collége de Sorrèze; E. Martinolli, du collége Chaptal; Sandier, du lycée de Lyon; Watteau, de l'École Centrale; Vaison, du lycée Napoléon; Giard, du lycée de Douai; Gayou, du lycée de Poitiers; Alfred Jalouzet, du lycée Louis-le-Grand; Baer, Houbre, du lycée de Strasbourg; Carriage, du lycée de Besançon; Graindorge. M. Martinolli généralise la question en considérant un cercle dont le centre est sur une conique quelconque. M. Annequin prend aussi une conique quelconque, le centre étant au sommet. M. Paul Capin, maître d'études au lycée de Toulouse, trouve une propriété analogue pour le paraboloïde et la sphère.