NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DESBOVES

# Note sur deux théorèmes de Sturm et d'Ostrogdski

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 6 (1867), p. 348-350

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__348_1>

# NOTE SUR DEUX THÉORÈMES DE STURM ET D'OSTROGDSKI;

PAR M. DESBOVES.

Le théorème de Sturm relatif à la résolution des équations numériques s'applique sans modification au cas des racines égales, seulement il ne fait pas connaître en même temps l'ordre de multiplicité de la racine calculée. Mais, sans avoir recours à la théorie des racines égales, on peut

(*) On peut lire de judicieuses réflexions sur ce sujet dans une Note de M. Abel Transon, insérée aux *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. III, p. 318, année 1844.

déterminer l'ordre de multiplicité par le théorème suivant, dû à Sturm.

Théorème. — *Divisez la fonction, premier membre de l'équation donnée, et la dérivée de cette fonction, par leur plus grand commun diviseur, substituez la racine de l'équation donnée dans le second quotient et dans la dérivée du premier, le quotient des deux nombres obtenus sera égal à l'ordre de multiplicité de la racine.*

*Démonstration.* — Soient X la fonction donnée; X′ sa dérivée; D leur plus grand commun diviseur; Q et $Q_1$ les quotients obtenus en divisant X et X′ par D; on a

$$X = DQ,\quad X' = DQ_1,\quad \text{d'où}\quad \frac{Q_1}{Q} = \frac{X'}{X}.$$

$a$ étant une racine de l'ordre de multiplicité $p$, on pose

$$X = (x - a)^p \varphi x,$$

d'où

$$X' = p(x - a)^{p-1} \varphi x + (x - a)^p \varphi' x;$$

par suite,

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{p \varphi x + (x - a) \varphi' x}{(x - a) \varphi x}.$$

Cette dernière équation peut s'écrire

$$Q_1 : \frac{Q}{x - a} = p + (x - a) \frac{\varphi' x}{\varphi x}.$$

En y faisant $x = a$, $\dfrac{Q}{x - a}$ devient, comme on sait, égal au résultat de la substitution de $a$ à la place de $x$ dans la dérivée Q′ du polynome Q, et le second membre se réduit à $p$. Si donc on désigne par $(Q_1)a$, $(Q')a$ les résultats de la substitution de $a$ à la place de $x$ dans $Q_1$

et $Q'$, on a

$$p = \frac{(Q_1)a}{(Q')a}.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Théorème d'Ostrogdski. — L'égalité précédente montre que l'équation $Q_1 - pQ' = 0$ est satisfaite par une racine quelconque $a$ de l'ordre de multiplicité $p$; le polynôme $Q_1 - pQ'$ est donc divisible par tous les facteurs binômes correspondants aux racines de l'ordre de multiplicité $p$.

Mais, comme on va le voir, le même polynôme n'est pas divisible par les facteurs correspondants aux racines d'un autre ordre de multiplicité $q$. En effet, les racines de l'ordre $q$ doivent satisfaire à l'équation

$$Q_1 - qQ' = 0;$$

si elles satisfaisaient en même temps à l'équation

$$Q_1 - pQ' = 0,$$

elles seraient racines par cela même de l'équation

$$Q_1 = 0;$$

mais cela est impossible, puisque cette dernière équation ne contient aucune des racines de l'équation proposée.

D'autre part, nous remarquons que $Q$ est le produit de tous les facteurs binômes correspondants à toutes les racines de l'équation proposée, mais pris à la première puissance. *Donc, en égalant à zéro le plus grand commun diviseur entre* $Q$ *et* $Q_1 - pQ'$, *on aura l'équation dont les racines sont toutes celles de l'ordre de multiplicité* $p$, *mais prises chacune une fois. C'est le théorème d'Ostrogdski.*