NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TH. DIEU

Questions de licence

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 298-308

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__298_1>

QUESTIONS DE LICENCE;

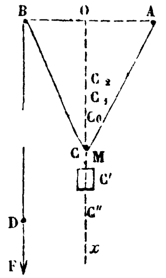
SOLUTIONS PAR M. TH. DIEU,
Agrégé, Docteur ès Sciences.

II. — PROBLÈME DE MÉCANIQUE.

Un cordon est fixé en A *par une de ses extrémités ; il passe sur une poulie mobile* M *à laquelle est attaché un corps pesant* P, *puis sur une poulie fixe* B, *et une force verticale constante appliquée à l'autre extrémité* D *maintient l'équilibre. Quel sera le mouvement si cette force est augmentée ou diminuée tout à coup d'une certaine quantité? On fera abstraction de la roideur du cordon, de son extensibilité, de son poids et des frottements; de plus on regardera les poulies* M *et* B *comme des points, dont le second se trouve sur une horizontale passant par le point* A.

On doit considérer M comme un point matériel ayant une certaine masse m, libre et en repos dans une position donnée C_0 sur la verticale Ox du milieu de AB, et sur lequel agissent pour le mettre en mouvement, le poids mg et deux forces égales entre elles, de grandeur donnée mf, dirigées suivant C_0A, C_0B; la résultante de ces trois forces étant dirigée suivant Ox, le mouvement commencera dans cette direction. Admettons que M se trouve à

Fig. 1.



une époque quelconque dans une position C sur Ox, avec une vitesse acquise suivant cette droite; il ne doit pas s'en écarter, car la résultante de mg et des forces égales à mf agissant alors suivant CA, CB, qui font varier le mouvement, est toujours dirigée suivant Ox. Le mouvement commencé sur Ox continuera donc sur cette droite, soit dans le sens de la pesanteur, soit dans le sens opposé.

Soit $AB = 2a$. C étant la position de M à la fin d'une durée t comptée depuis l'origine du mouvement, soit $OC = x$. Enfin, soit v la vitesse de M dans la position C, positive dans le sens Ox, négative dans le sens opposé. L'équation du mouvement sera, d'après ce qui précède,

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{dt} = g - \frac{2fx}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

car le cosinus des angles égaux ACO, BCO est $\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$, et la somme, suivant Ox, des composantes des forces accélératrices f est par conséquent $\frac{2fx}{\sqrt{a^2+x^2}}$. On déduit immédiatement de cette équation

$$(2)\qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \quad \text{ou} \quad v^2 = A + 2gx - 4f\sqrt{a^2 + x^2};$$

la constante A introduite par l'intégration est déterminée, d'après les conditions du problème, par

$$(3)\qquad A = 4f\sqrt{a^2 + x_0^2} - 2gx_0,$$

x_0 désignant l'x de la position initiale C_0 de M.

Si l'on avait

$$g = \frac{2fx_0}{\sqrt{a^2 + x_0^2}},$$

le système resterait en repos. Il faut examiner les deux hypothèses de

$$g > \frac{2fx_0}{\sqrt{a^2 + x_0^2}}, \quad \text{puis de} \quad g < \frac{2fx_0}{\sqrt{a^2 + x_0^2}}.$$

On voit tout de suite que deux cas doivent être distingués dans la première, celui de $g > 2f$ et celui de $g < 2f$.

1° $g > 2f$. *On a à fortiori* $g > \frac{2fx_0}{\sqrt{a^2 + x_0^2}}$. — Le rapport différentiel $\frac{dv}{dt}$ est d'abord positif et reste toujours tel, puisque le cosinus $\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ est toujours inférieur à l'unité; le mouvement doit donc commencer dans le sens de la pesanteur, et continuer dans ce sens tant que la longueur du cordon le permet.

2° $g < 2f$, *mais* $> \frac{2fx_0}{\sqrt{a^2 + x_0^2}}$. — Le rapport différentiel $\frac{dv}{dt}$ est d'abord positif. Il devient nul pour la valeur positive de x qui satisfait à l'équation

$$g\sqrt{a^2 + x^2} - 2fx = 0,$$

savoir :

$$x = \frac{ga}{\sqrt{4f^2 - g^2}} = x',$$

puis négatif pour $x > x'$. Le mouvement commence donc dans le sens de la pesanteur, et la vitesse croît jusqu'à la position C′ où $x = x'$, puis décroît ensuite.

En C′, où la vitesse atteint son maximum, on a

$$v^2 = \mathrm{A} - 2a\sqrt{4f^2 - g^2},$$

d'après l'équation (2). On peut remarquer que si le point M était initialement dans cette position, la force mf établirait l'équilibre.

La vitesse, décroissante à partir de la position C′, devient nulle en C″ déterminée par la valeur de x différente de x_0, qui satisfait à l'équation

$$\mathrm{A} + 2gx - 4f\sqrt{a^2 + x^2} = 0 :$$

$$x = \frac{g\mathrm{A}}{4f^2 - g^2} - x_0 = x_0 + \frac{4f\sqrt{a^2 + x_0^2}}{4f^2 - g^2}\left(g - \frac{2fx_0}{\sqrt{a^2 + x_0^2}}\right) = x''.$$

Le point M doit revenir de C″ vers la position initiale C_0, puisqu'on a $\dfrac{2fx''}{\sqrt{a^2 + x''^2}} > g$. D'après l'équation (2), il reprend dans chaque position C la même vitesse qu'il avait en sens inverse quand il y a d'abord passé. Le mouvement consistera donc en une série indéfinie d'oscillations isochrones. (Nous supposons bien entendu le fil assez long pour que M arrive en C″.)

3° $g < \dfrac{2fx_0}{\sqrt{a^2 + x_0^2}}$. — Le rapport différentiel $\dfrac{dv}{dt}$ est d'abord négatif. Il devient nul pour la valeur de x représentée ci-dessus par x' (cette valeur est ici inférieure à x_0), puis positif pour $x < x'$. Le point remonte donc en premier lieu avec une vitesse croissante (nous considérons la valeur absolue) jusqu'en C_1 déterminé par $x = x'$, et la vitesse décroît ensuite.

Le maximum de la vitesse a la même expression que dans le cas précédent, et la même remarque s'applique à la position C_1 qu'à C'.

La vitesse, décroissante en valeur absolue à partir de C_1, devient nulle dans la position C_2 déterminée par la valeur de x qui a été représentée par x'' (ici, x'' est inférieure à x').

Le point M doit revenir de C_2 vers C_0, car on a

$$g > \frac{2fx''}{\sqrt{a^2 + x''^2}}.$$

Il reprend dans chaque position en y revenant la vitesse avec laquelle il y a passé d'abord [équation (2)]. On a donc encore une série indéfinie d'oscillations isochrones.

III. — Application du principe de d'Alembert.

Une parabole, dont l'axe est vertical et la concavité en sens inverse de la pesanteur, tourne autour de son axe avec une vitesse constante ω. Quel sera le mouvement sur cette courbe d'un point matériel pesant assujetti à y rester, et partant d'une position donnée sans vitesse relative? On fait abstraction du frottement.

L'axe de rotation est pris pour axe des x, le sommet de la parabole pour origine et la position de son plan quand $t = 0$ pour $\widehat{xy}$. La direction de Oz est choisie de manière que la trace du plan de la parabole sur $\widehat{yz}$ tourne d'abord de Oy vers Oz, dans l'angle des y, z positifs.

Le principe de d'Alembert fournit l'équation

$$(1) \qquad \left(\frac{d^2x}{dt^2} + g\right)\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z = 0.$$

On a

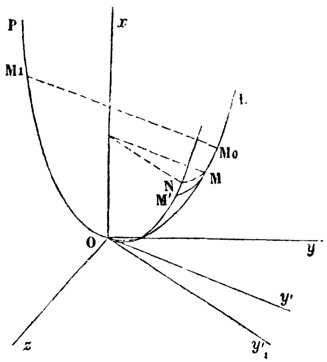
$$(2) \qquad 2px - y^2 - z^2 = 0, \quad y \sin \omega t - z \cos \omega t = 0,$$

d'où

$$(3) \qquad \frac{p\delta x - y\delta y - z\delta z}{\sqrt{p^2 + y^2 + z^2}} = 0,$$

$$(4) \qquad \delta y \sin \omega t - \delta z \cos \omega t = 0.$$

FIG. 2.



Des équations (1), (3), (4), on déduit

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + g - \frac{p\lambda}{\sqrt{p^2 + y^2 + z^2}} = 0,$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{y\lambda}{\sqrt{p^2 + y^2 + z^2}} + \lambda' \sin \omega t = 0,$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{z\lambda}{\sqrt{p^2 + y^2 + z^2}} - \lambda' \cos \omega t = 0;$$

λ est la réaction de la courbe rapportée à l'unité de masse et λ' celle du plan.

Pour éliminer λ et λ', il suffit de multiplier ces trois équations par $2x$, y, z et d'ajouter membre à membre;

eu égard aux équations (2), on a ainsi

$$2x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}+2gx=0.$$

L'équation du paraboloïde donne

$$p\frac{d^2x}{dt^2}-y\frac{d^2y}{dt^2}-z\frac{d^2z}{dt^2}-\left(\frac{dy}{dt}\right)^2-\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=0.$$

Ajoutant membre à membre avec l'équation précédente, il vient

$$(5)\qquad (2x+p)\frac{d^2x}{dt^2}-\left(\frac{dy}{dt}\right)^2-\left(\frac{dz}{dt}\right)^2+2gx=0.$$

Soient Oy' et Oy'_1 les traces du plan de la parabole sur $\widehat{yz}$ à la fin des temps t et $t+dt$, en sorte que

$$y'Oy'_1=\omega dt.$$

Soient encore $MM'=ds$ l'arc décrit dans l'espace par le mobile pendant la durée dt, et $NM'=ds'$ l'arc correspondant de la parabole; celui du parallèle de la surface est $MN=y'\omega dt$, y' désignant une nouvelle coordonnée comptée dans le plan de la parabole sur la tangente en son sommet. Le triangle MM'N fournit

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\ \text{ou}\ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2+y'^2\omega^2.$$

On a sur la parabole $\left(\frac{ds'}{dl}\right)^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy'}{dt}\right)^2$. Remplaçant dans la formule précédente $\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2$ par sa valeur, il vient

$$(6)\qquad \left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=\left(\frac{dy'}{dt}\right)^3+y'^2\omega^2.$$

L'équation de la parabole dans son plan,

$$y'^2-2px=0,$$

donne

$$(7)\qquad p\frac{d^2x}{dt^2}-y'\frac{d^2y'}{dt^2}-\left(\frac{dy'}{dt}\right)^2=0.$$

De (5), (6), (7) et de l'équation de la parabole, on déduit sans difficulté

$$(8)\qquad (y'^2+p^2)\frac{d^2y'}{dt^2}+y'\left(\frac{dy'}{dt}\right)^2+ny'=0,$$

en posant, pour abréger,

$$p^2\left(\frac{g}{p}-\omega^2\right)=n.$$

Cette équation du mouvement sur la parabole se ramène au premier ordre en prenant y' pour variable indépendante. Si l'on pose simplement pour cela

$$\frac{dy'}{dt}=u,\quad \text{d'où}\quad \frac{d^2y'}{dt^2}=u\frac{du}{dy'},$$

les variables se séparent, et il vient

$$\frac{u\,du}{u^2+n}+\frac{y'\,dy'}{y'^2+p^2}=0,$$

dont l'intégrale générale est

$$(u^2+n)(y'^2+p^2)=C,$$

C désignant la constante arbitraire. Comme $\frac{dy'}{dt}$ ou u est nul pour $t=0$, on doit avoir

$$n(y_0^2+p^2)=C,$$

y_0 étant la valeur initiale de y'; l'intégrale particulière de l'équation (8) répondant au problème proposé est par conséquent

$$(9)\qquad \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2=\frac{n(y_0^2-y'^2)}{p^2+y'^2}.$$

D'après cela, si v' représente la vitesse du mobile à la fin du temps t sur la parabole, on a

$$(10)\quad \begin{cases} v'^2 = \left(\dfrac{dy'}{dt}\right)^2 \left[1 + \left(\dfrac{dx}{dy'}\right)^2\right] \\ \quad = \dfrac{n(y_0^2 - y'^2)}{p^2 + y'^2}\left(1 + \dfrac{y'^2}{p^2}\right) = \dfrac{n(y_0^2 - y'^2)}{p^2}. \end{cases}$$

Selon que n est une quantité positive ou négative, y'^2 doit donc être toujours moindre ou toujours plus grand que y_0^2; il est nécessaire d'examiner séparément ces deux cas. Si l'on avait $n = 0$, c'est-à-dire $\omega = \sqrt{\frac{g}{p}}$, *le mobile ne changerait pas de position sur la parabole.*

1° $\omega^2 < \frac{g}{p}$ *ou* $n > 0$. — Supposons que le sens des y' positifs ait été choisi de manière que y_0 soit positif. D'après l'équation (9) ou (10), y' doit d'abord diminuer jusqu'à zéro; le mobile ira donc de sa position initiale M_0 jusqu'au sommet O de la parabole. La vitesse relative v' ayant en ce point, d'après l'équation (10), la valeur $\frac{y_0}{p}\sqrt{n}$ différente de zéro, le mobile doit le dépasser et remonter sur la partie OP, où il ira jusqu'à la position M_1 symétrique de M_0 par rapport à Ox, pour laquelle $y' = -y_0$ et par suite $v' = 0$. Comme le mobile se trouve en M_1 exactement dans les mêmes conditions qu'en M_0, il reviendra de M_1 en M_0, d'où il retournera en M_1, et ainsi de suite; le mouvement consistera donc en une série indéfinie d'oscillations, évidemment isochrones, entre les positions M_0, M_1. Enfin, de ce que la vitesse v' a les mêmes valeurs, d'après l'équation (10), pour les positions symétriques par rapport à Ox, il résulte que deux parties symétriques de M_0OM_1, en particulier OM_0, OM_1, seront toujours parcourues dans des durées égales entre elles, soit dans un sens, soit dans le sens opposé; la durée du parcours d'un arc est en effet $\int \frac{ds'}{v'}$ prise entre ses extrémités.

L'équation (9) donne

$$dt = \mp \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot dy' \sqrt{\frac{p^2 + y'^2}{y_0^2 - y'^2}},$$

où il faut prendre le signe supérieur ou le signe inférieur selon que le mobile va de M_0 vers M_1 ou, au contraire, de M_1 vers M_0. Si l'on pose $y' = y_0 \cos \varphi$, ce que les limites y_0, $-y_0$ de y' indiquent, il vient

$$dt = \frac{\sqrt{p^2 + y_0^2}}{\sqrt{n}} \cdot d\varphi \sqrt{1 - \frac{y_0^2}{p^2 + y_0^2} \sin^2 \varphi},$$

en convenant de prendre zéro pour valeur initiale de φ et de faire croître cet angle indéfiniment. On voit facilement que, au facteur $\frac{1}{\sqrt{n}}$ près, l'expression de dt est celle de la différentielle de l'arc d'une ellipse de demi-axes égaux à $\sqrt{p^2 + y_0^2}$ et p, cet arc étant pris à partir d'une des extrémités du petit axe. Le premier quart de l'ellipse répond à M_0O en partant de l'origine du mouvement, les quarts suivants à OM_1, M_1O (retour de M_1 à O), etc.; des arcs de l'ellipse symétriques par rapport à son grand axe répondent à des parties symétriques de M_0O et de OM_1, dans la même oscillation ou dans des oscillations quelconques de même sens, et des arcs symétriques par rapport au petit axe répondent à une même partie de M_0M_1, dans deux oscillations successives ou de sens contraires quelconques. Tout cela s'accorde parfaitement avec ce qui a été dit ci-dessus sur l'isochronisme.

2° $\omega^2 > \frac{g}{p}$ *ou* $n < 0$. — Supposons encore que y_0 soit positif. D'après les équations (9) et (10), y' doit croître indéfiniment à partir de y_0, et v' à partir de zéro; le mobile ira donc de M_0 vers L, et se mouvra toujours dans ce sens avec une vitesse relative de plus en plus grande.

Nous ferons enfin remarquer qu'on arrive presque immédiatement à l'équation (10), en regardant la parabole comme fixe, et en appliquant au mobile considéré comme libre, outre la pesanteur et la réaction normale de la parabole, la force centrifuge due à la rotation autour de Ox. En effet on a ainsi

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g + \frac{Np}{\sqrt{p^2+y'^2}}, \quad \frac{d^2y'}{dt^2} = \omega^2 y' - \frac{Ny'}{\sqrt{p^2+y'^2}},$$

d'où

$$\frac{ds}{dt}\cdot d\frac{ds}{dt} = \omega^2 y'\,dy' - g\,dx = -\left(\frac{g}{p} - \omega^2\right) y'\,dy', \ldots$$

N. B. — On a une question analogue, qu'on pourrait nommer *le problème du régulateur à force centrifuge*, en prenant une circonférence au lieu d'une parabole.