A. HERMANN

Sur le cas irréductible de l'équation du troisième degré

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 270-275

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__270_1>

SUR LE CAS IRRÉDUCTIBLE DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ;

PAR M. A. HERMANN,
Ancien élève de l'École Normale supérieure.

I. — *Exposé de la méthode.*

Lorsque l'équation du troisième degré a ses trois racines réelles, la formule de Cardan devient illusoire et ne peut pas servir au calcul numérique des racines de l'équation ; il est cependant possible, dans ce cas, d'exprimer les racines à l'aide de formules pouvant servir à leur calcul numérique.

Soit

$$x^3 - px - q = 0$$

l'équation du troisième degré, dans laquelle je mets les signes en évidence. Je puis écrire l'équation sous la forme

$$x^3 = px + q,$$

$$x^2 = p + \frac{q}{x},$$

$$x = \sqrt{p + \frac{q}{x}},$$

le radical ayant une double détermination et la valeur de x sous le radical ayant le même signe que le radical. Cette formule peut servir de formule d'approximation successive pour deux des racines de l'équation du troisième degré.

Celle qui correspond au signe $+$ du radical est évidemment supérieure à $\sqrt{p}$;

$$x_1 = \sqrt{p}$$

est une valeur de cette racine approchée par défaut;

$$x_2 = \sqrt{p + \frac{q}{x_1}}$$

une valeur approchée par excès;

$$x_3 = \sqrt{p + \frac{q}{x_2}}$$

une valeur approchée par défaut.

Cette racine x' peut être exprimée à l'aide d'un nombre illimité de radicaux par la formule

$$x' = \sqrt{p + \frac{q}{\sqrt{p + \frac{q}{\sqrt{p + \cdots}}}}}$$

La deuxième x'' ne peut être exprimée que par défaut par la formule

$$x'' = -\sqrt{p - \frac{q}{\sqrt{p - \frac{q}{\sqrt{p - \cdots}}}}}$$

Ces formules sont susceptibles d'une interprétation géométrique très-simple.

Les racines de l'équation du troisième degré peuvent être considérées comme les abscisses des points communs à la parabole et à l'hyperbole :

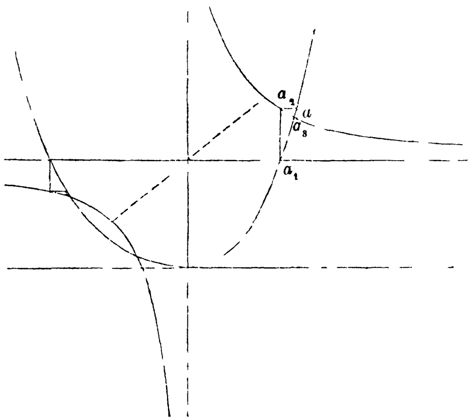
$$x^2 = y,$$

$$xy = px + q,$$

$$y = p + \frac{q}{x}.$$

Nous cherchons l'abscisse du point a.

Fig. 1.



La première valeur approchée

$$x_1 = \sqrt{p}$$

représente l'abscisse du point a_1, la deuxième l'abscisse du point a_2, la troisième l'abscisse du point a_3, etc. On voit sur la figure comme sur la formule que ces valeurs vont constamment en se rapprochant de la racine exacte.

La troisième racine peut être obtenue d'une manière un peu différente. L'équation peut s'écrire

$$x = -\frac{q}{p} + \frac{x^3}{p}.$$

La troisième racine est négative et supérieure en valeur absolue à $\frac{q}{p}$.

$$x_1 = -\frac{q}{p}$$

est une première valeur approchée de cette racine;

$$x^2 = -\frac{q}{p} + \frac{x_1^3}{p}$$

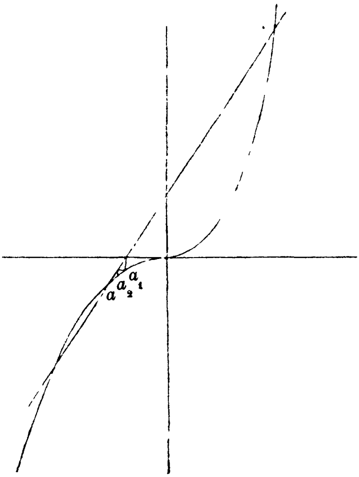
une deuxième valeur plus approchée, etc.

Cette formule est également susceptible d'une interprétation géométrique.

La racine que nous cherchons est l'abscisse de l'un des points d'intersection de la parabole cubique et de la droite

$$y = px + q.$$

Fig. 2.



La méthode d'approximation substitue à l'abscisse des points a les abscisses des points a_1, a_2,..., a_3, etc.

II. — *Calcul de l'erreur commise dans le calcul des racines par la méthode précédente après un certain nombre d'opérations.*

Considérons d'abord la première racine exprimée par la formule

$$x = \sqrt{p + \frac{q}{\sqrt{p + \frac{q}{\sqrt{p + \cdots}}}}}.$$

Désignons par ε_1, $\varepsilon_2, \ldots$, ε_n les erreurs commises après 1, 2, 3,..., n opérations, nous aurons

$$\varepsilon_1 < \sqrt{p + \frac{q}{\sqrt{p}}} - \sqrt{p} \quad \text{ou} \quad < \frac{\frac{q}{\sqrt{p}}}{\sqrt{p} + \sqrt{p + \frac{q}{\sqrt{p}}}};$$

j'augmente évidemment le deuxième membre en remplaçant $\sqrt{p + \frac{q}{\sqrt{p}}}$ par $\sqrt{p}$. J'aurai donc

$$\varepsilon_1 < \frac{q}{2p};$$

j'aurai de même

$$\varepsilon_2 < \sqrt{p + \frac{q}{\sqrt{p}}} - \sqrt{p + \frac{q}{\sqrt{p + \frac{q}{\sqrt{p}}}}},$$

$$\varepsilon_2 < \frac{\frac{q}{\sqrt{p}} - \frac{q}{\sqrt{p + \frac{q}{\sqrt{p}}}}}{\sqrt{p + \frac{q}{\sqrt{p}}} + \sqrt{p + \frac{q}{\sqrt{p + \frac{q}{\sqrt{p}}}}}},$$

ou

$$\varepsilon_2 < \frac{q\varepsilon_1}{\sqrt{p}\sqrt{p+\frac{q}{\sqrt{p}}}\left[\sqrt{p+\frac{q}{\sqrt{p}}}+\sqrt{p+\frac{q}{\sqrt{p+\frac{q}{\sqrt{p}}}}}\right]},$$

$$\varepsilon_2 < \frac{q\varepsilon_1}{2p\sqrt{p}} \quad \text{ou} \quad < \frac{q}{2p}\,\frac{q}{2p\sqrt{p}}.$$

On trouvera de même

$$\varepsilon_3 < \frac{q}{2p}\left(\frac{q}{2p\sqrt{p}}\right)^2,$$

$$\varepsilon_n < \frac{q}{2p}\left(\frac{q}{2p\sqrt{p}}\right)^{n-1}.$$

La méthode que je viens d'indiquer pour calculer une limite de l'erreur sera applicable toutes les fois que l'on aura

$$q < 2p\sqrt{p} \quad \text{ou} \quad q^2 < 4p^3.$$

Elle sera donc applicable dans une limite plus étendue que celle de la réalité des racines de l'équation du troisième degré, puisque, pour la réalité des racines, il suffit que l'on ait

$$27q^2 < 4p^3.$$

Si $q = 1$,

$$p = 100,$$

$$\varepsilon_2 < \frac{1}{200} \times \frac{1}{2000} \quad \text{ou} \quad < \frac{1}{400000}.$$

Cette méthode est donc assez commode pour le calcul des racines, lorsque q est petit par rapport à p.

On pourrait de même calculer une limite de l'erreur commise dans le calcul des deux autres racines; mais comme la méthode que j'indique ne me paraît avoir d'intérêt qu'au point de vue théorique, ce que j'ai dit suffit pour le but que je me propose.
