Hermann Laurent

Note sur les fonctions périodiques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 267-270

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__267_1>

NOTE SUR LES FONCTIONS PÉRIODIQUES;

PAR M. HERMANN LAURENT,
Repetiteur d'analyse à l'Ecole Polytechnique.

On appelle *période* d'une fonction $f(x)$ une quantité ω telle, que l'on ait

$$f(x+\omega)=f(x).$$

Il est aisé de voir que si ω est une période, $-\omega$, $\pm 2\omega$, $\pm 3\omega$, etc., seront également des périodes. En effet, on a, par exemple,

$$f(x+3\omega)=f(x+2\omega)=f(x+\omega)=f(x);$$

on a aussi

$$f(x-\omega)=f(x-\omega+\omega)=f(x).$$

ω, 2ω,.. , $n\omega$ ne constituent pas ce que l'on appelle des *périodes distinctes*; deux périodes ω et ω' sont distinctes lorsqu'il n'existe pas de période δ telle, que ω et ω' soient des multiples entiers de δ.

Lorsque ω et ω' sont deux périodes distinctes, $\omega+\omega'$ et en général $m\omega+m'\omega'$ sont également des périodes, m et m' désignant deux entiers positifs ou négatifs. Le but que nous nous proposons dans cette Note est de démontrer qu'une fonction ne peut avoir plus de deux périodes distinctes.

Pour le démontrer, nous ferons usage d'un principe très-fécond dû à Mourey, et que l'on peut énoncer comme il suit :

Si l'on représente la quantité imaginaire

$$r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$$

par une droite de longueur r et faisant avec un axe fixe dans un plan fixe un angle égal à θ, la somme de deux imaginaires sera représentée par la résultante des droites qui représentent chacune de ses parties. En effet, considérons les imaginaires

$$r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta), \quad r'(\cos\theta' + \sqrt{-1}\sin\theta');$$

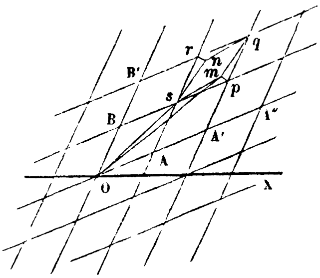
$r\cos\theta$ et $r'\cos\theta'$ sont les projections sur l'axe fixe des droites qui représentent les imaginaires en question; $r\cos\theta + r'\cos\theta'$ sera donc la projection sur le même axe de leur résultante, c'est-à-dire la partie réelle de l'imaginaire représentée par cette résultante, en considérant maintenant comme axe de projection une droite perpendiculaire à l'axe fixe de tout à l'heure, on verrait que $r\sin\theta$, $r'\sin\theta'$ et $r\sin\theta + r'\sin\theta'$ sont les projections des composantes et de leur résultante. Donc

$$r\cos\theta + r'\cos\theta' + \sqrt{-1}\,(r + \sin\theta + r'\sin\theta'),$$

somme des imaginaires considérées, est bien représentée par leur résultante.

Ceci posé, supposons qu'une fonction puisse admettre plusieurs périodes; soient a et b les périodes de cette fonction qui ont les plus petits modules, soient OA et OB les droites qui représentent a et b. Portons sur OA et OB prolongées dans les deux sens des longueurs AA′, A′A″,... égales à OA, et BB′,... égales à OB. Par les points B, B′,..., A, A′, A″,... menons des parallèles à OA et OB;

nous décomposerons ainsi le plan en parallélogrammes, et, en joignant le sommet q de l'un quelconque de ces



parallélogrammes au point O, la droite ainsi menée sera une période ; car elle sera la résultante de deux droites représentant deux imaginaires de la forme $\mu a + \nu b$, μ et ν désignant deux entiers.

Soit alors c une période distincte de a et de b, soit Om la droite qui représente cette imaginaire; Os étant une période, d'après ce que nous venons de dire, sm, résultante de mO et de Os, représentera encore une période; qn, égale et parallèle à sm, représentera une nouvelle période; rn et mp, résultantes de droites représentant des périodes, seront deux nouvelles périodes, ainsi que sn et qm.

Or le parallélogramme $qnsm$ a un périmètre moindre que $rqps$; donc

$$sm + mq < sp + pq;$$

donc l'une des droites sm, mq est moindre que la plus grande des droites sp, pq, qui ont des longueurs égales aux modules de a et b; donc, enfin, il existerait une période ayant un module moindre que celui de a ou de b, ce qui est contre notre hypothèse; donc, enfin, une fonction ne peut posséder plus de deux périodes. C. Q. F. D.

Une fonction ne peut même posséder deux périodes réelles ou ayant un rapport réel. En effet, en désignant par ω et ω' les deux périodes ayant le plus petit module, $\omega - \omega'$ serait encore une période et aurait un module moindre que celui de ω ou de ω', ce qui est contre notre hypothèse.