A. GENOCCHI

Sur une règle de convergence des séries

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 261-267

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__261_0>

SUR UNE RÈGLE DE CONVERGENCE DES SÉRIES;

PAR M. A. GENOCCHI.

Une règle assez remarquable pour déterminer la convergence ou divergence des séries peut être déduite très-simplement d'une formule identique due à Nicole (*). On a d'abord

$$\frac{1}{a-b}=\frac{1}{a+v_n}+\frac{b+v_n}{(a+v_n)(a-b)};$$

d'où, en remplaçant successivement v_n par v_0, v_1, $v_2, \ldots, v_n$, multipliant respectivement par les quantités 1, $\frac{b+v_0}{a+v_0}$, $\frac{(b+v_0)(b+v_1)}{(a+v_0)(a+v_1)}$, etc., et ajoutant les produits, on tire, après des réductions faciles,

$$\begin{aligned}\frac{1}{a-b}=\frac{1}{a+v_0}&+\frac{b+v_0}{(a+v_0)(a+v_1)}+\frac{(b+v_0)(b+v_1)}{(a+v_0)(a+v_1)(a+v_2)}+\ldots\\&+\frac{(b+v_0)(b+v_1)\ldots(b+v_{n-1})}{(a+v_0)(a+v_1)\ldots(a+v_n)}\\&+\frac{(b+v_0)(b+v_1)\ldots(b+v_n)}{(a+v_0)(a+v_1)\ldots(a+v_n)(a-b)}.\end{aligned}$$

Cette formule ne diffère pas de celle de Nicole, qu'on trouve en faisant $v_0=0$. Le second membre renferme les $n+1$ premiers termes d'une série avec un terme complémentaire. Désignons par w_n le terme général de la série, par R_n le terme complémentaire, nous aurons

$$\frac{1}{a-b}=w_0+w_1+\ldots+w_n+R_n,\quad \frac{w_{n+1}}{w_n}=\frac{b+v_n}{a+v_{n+1}};$$

(*) *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* pour 1727, p. 257.

de plus,

$$\frac{1}{R_n} = (a-b)\left(1+\frac{a-b}{b+v_0}\right)\left(1+\frac{a-b}{b+v_1}\right)\cdots\left(1+\frac{a-b}{b+v_n}\right).$$

Si les quantités a, b, v_n sont positives, et que a soit $> b$, on aura évidemment

$$\frac{1}{R_n} > (a-b)\left(1+\frac{a-b}{b+v_0}+\frac{a-b}{b+v_1}+\ldots+\frac{a-b}{b+v_n}\right);$$

d'où il s'ensuit que si la série dont le terme général est $\frac{1}{b+v_n}$ est divergente, la valeur de $\frac{1}{R_n}$ augmentera indéfiniment avec n, et par conséquent celle de R_n décroîtra sans cesse et aura pour limite zéro, en sorte que la série Σw_n sera convergente. Soit

$$\frac{1}{b+v_n} = v'_n.$$

D'après un principe connu, une série Σu_n est divergente si l'on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v'_{n+1}}{v'_n},$$

et convergente si l'on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{w_{n+1}}{w_n},$$

pour n quelconque ou à partir d'une valeur donnée de n, les termes u_n étant supposés positifs. Il en résulte la règle suivante :

Une série composée de termes positifs u_n sera convergente s'il existe une autre série à termes positifs $\frac{1}{b+v_n}$ qui soit divergente et telle que, du moins à partir d'une *valeur donnée de n; on ait constamment*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{b + v_n}{a + v_{n+1}},$$

a et b étant deux nombres déterminés positifs et $a > b$.

Au contraire, la même série sera divergente si l'on a sous les mêmes conditions

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{b + v_n}{b + v_{n+1}}.$$

Il est visible que la première partie de cet énoncé serait, à plus forte raison, vérifiée si la série $\Sigma \frac{1}{b + v_n}$ était convergente, et que dans ce cas il suffirait de la condition

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{b + v_n}{b + v_{n+1}}.$$

On peut aussi mettre les inégalités précédentes sous les formes

$$(a + v_{n+1}) \frac{u_{n+1}}{u_n} - (a + v_n) < -(a - b),$$

$$(b + v_{n+1}) \frac{u_{n+1}}{u_n} - (b + v_n) > 0.$$

En remarquant que si la série $\Sigma \frac{1}{a + v_n}$ est divergente, la série $\Sigma \frac{1}{b + v_n}$ le sera à plus forte raison, on peut encore considérer seulement l'expression

$$(a + v_{n+1}) \frac{u_{n+1}}{u_n} - (a + v_n).$$

La série $\Sigma \frac{1}{a + v_n}$ étant supposée divergente si cette expression est positive, la série Σu_n sera aussi divergente;

si cette expression est négative *et toujours inférieure à une quantité déterminée négative,* la série Σu_n sera convergente. Si la série $\Sigma \frac{1}{a+v_n}$ était convergente, il suffirait, pour en conclure la convergence de la série Σu_n, que la même expression fût toujours négative. En supposant la série $\Sigma \frac{1}{a+v_n}$ divergente, on voit que *la série* Σu_n *sera convergente ou divergente suivant que l'expression indiquée aura pour n infini une limite négative ou une limite positive.*

Prenons, par exemple, $a+v_n=n$, nous retrouverons la règle connue de M. Duhamel. En faisant successivement

$$a+v_n=n, \quad =nln, \quad =nlnlln, \quad =nlnllnllln,$$

où la caractéristique l désigne des logarithmes népériens, nous obtiendrons un autre théorème connu (*), d'après lequel une série Σu_n est convergente ou divergente suivant que sera négative ou positive la première des expressions

$$\lim\left[(n+1)\frac{u_{n+1}}{u_n}-n\right],$$

$$\lim\left[(n+1)\,l(n+1)\frac{u_{n+1}}{u_n}-nln\right],$$

$$\lim\left[(n+1)\,l(n+1)\,ll(n+1)\frac{u_{n+1}}{u_n}-nlnlln\right],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

qui ne sera pas égale à zéro. On sait, en effet, que dans tous ces exemples la série $\Sigma \frac{1}{a+v_n}$ est divergente.

Le théorème que nous venons de rappeler est surtout

(*) CATALAN, *Traité élémentaire des séries*, p. 23, theor. XIV.

utile lorsque $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ se présente sous l'une des formes

$$1 + \frac{k_n}{n},$$

$$1 - \frac{1}{n} + \frac{k_n}{nln},$$

$$1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{nln} + \frac{k_n}{nlnlln},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

k_n désignant une fonction de n qui, pour n infini, a une limite finie différente de -1. Dans les deux premiers cas est comprise la règle de Gauss, qui suppose

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{h}{n} + \frac{H}{n^2},$$

h étant une constante et H une fonction de n dont la valeur reste finie.

Le théorème que M. Rouché a donné dans les *Nouvelles Annales* (1866, p. 12) se déduit immédiatement de notre règle. Car, en supposant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n-p-x}{n-p+1},$$

si la quantité x est positive, on fera

$$a = x, \quad b < x, \quad v_n = n - p - x,$$

et l'on aura

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{b+v_n}{a+v_{n+1}};$$

si la quantité x est négative ou nulle, on fera

$$b + v_n = n - p,$$

et l'on aura

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqq \frac{b+v_n}{b+v_{n+1}};$$

donc la série Σu_n est convergente dans le premier cas, divergente dans le dernier.

La règle de convergence démontrée dans cette Note se rapproche de celle de M. Kummer (*), et, comme celle-ci, elle est applicable à une série quelconque, attendu qu'une série à termes positifs u_n étant donnée, il existe toujours une série auxiliaire $\Sigma \frac{1}{b + v_n}$, par laquelle l'une ou l'autre des inégalités ci-dessus indiquées sera vérifiée. En effet, si la série Σu_n est divergente, on peut prendre

$$b + v_n = \frac{u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}}{u_n},$$

puisque, en vertu d'un théorème d'Abel, la série $\Sigma \frac{1}{b + v_n}$ sera aussi divergente, et il viendra

$$b + v_{n+1} = \frac{u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n}{u_{n+1}},$$

d'où

$$\frac{b + 1 + v_n}{b + v_{n+1}} = \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

et par suite

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{b + v_n}{b + v_{n+1}}.$$

Si la série Σu_n est convergente, on peut prendre

$$b + v_n = \frac{u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots}{u_n},$$

d'où

$$b + v_{n+1} = \frac{u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots}{u_{n+1}}, \qquad \frac{b + v_n}{b + 1 + v_{n+1}} = \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

(*) *Journal de Crelle*, t. XIII.

et par suite

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{b + v_n}{a + v_{n+1}},$$

si a est une quantité comprise entre b et $b + 1$.