Note sur la question proposée au concours d'admission à l'École polytechnique (année 1866)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 258-260

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__258_1>

NOTE

sur la question proposée au concours d'admission à l'École Polytechnique (année 1866).

1. Si x et y représentent les coordonnées du pied (sur l'hyperbole) d'une normale commune aux deux courbes considérées, la valeur de x doit vérifier l'équation

$$(1) \qquad px^7 - 2m^4x^4 + 2pm^4x^3 + 2m^8 = 0,$$

qui admet une racine réelle *négative*, et au plus deux racines positives.

A chaque valeur réelle de x correspond une valeur réelle de y donnée par $xy = m^2$; donc le nombre des normales communes est au moins *un*, et au plus *trois*.

2. En remplaçant dans l'équation (1) x par pz et m^4 par p^4h, il vient

$$(2) \qquad z^7 - 2hz^3(z-1) + 2h^2 = 0,$$

(*) Je ne reproduis pas ces figures, que chacun peut se représenter. P.

d'où

$$(3) \qquad h = \frac{z^3}{2}\left[z - 1 \pm \sqrt{(z-2)^2 - 3}\right].$$

La quantité h ou $\frac{m^4}{p^4}$ étant réelle et positive, l'équation (3) montre que z ne peut avoir une valeur positive moindre que $2 + \sqrt{3}$ (*). D'autre part, il est évident que pour toute racine positive de l'équation (2), on a

$$2h(z-1) > z^4,$$

inégalité qui donne

$$2h > \frac{z^4}{z-1} > z^3 + z^2 + z + 1,$$

ou, parce que z est au moins égale à $2 + \sqrt{3}$,

$$2h > (2+\sqrt{3})^3 + (2+\sqrt{3})^2 + (2+\sqrt{3}) + 1,$$
$$2h > 36 + 20\sqrt{3} > 70,$$

et par suite

$$h > 35, \quad \frac{m^4}{p^4} > 35, \quad 7p^4 < \frac{m^4}{5}.$$

Il n'y aura donc qu'une seule normale commune, si $7p^4$ est plus grand que $\frac{m^4}{5}$, et à plus forte raison si on a $7p^4 > 2m^4$.

3. Mais l'inégalité $h > 35$ n'exprime pas une condition suffisante pour que le nombre des normales communes soit *trois;* car la plus petite valeur entière que h puisse avoir lorsqu'il y a trois normales communes est 63. Cela résulte du calcul suivant.

(*) Par consequent le minimum des valeurs positives de l'abscisse x est $p(2+\sqrt{3})$.

En posant

$$h = \alpha z^3 \quad \text{et} \quad z = \frac{2\alpha(\alpha+1)}{2\alpha-1},$$

l'équation (2) est vérifiée, quel que soit α. Pour que z et h soient positifs, il faut prendre $\alpha > \frac{1}{2}$.

La dérivée de h par rapport à α est

$$\frac{8\alpha^3(\alpha+1)^2}{(2\alpha-1)^4}(8\alpha^2 - 5\alpha - 4);$$

en l'égalant à zéro, l'équation qui en résulte admet pour racine positive $\frac{5+\sqrt{153}}{16} = 1,08, \ldots$, et cette racine détermine le minimum des valeurs positives de h correspondantes à des valeurs positives de z. Pour $\alpha = 1,08,\ldots$, on a $z = 3,86,\ldots$, et, en remplaçant α et z par leurs valeurs dans l'équation $h = \alpha z^3$, on trouve $h > 62$ et $h < 63$; ainsi, en nombres entiers, le minimum de h est 63.

Lorsque h ou $\frac{m^4}{p^4}$ est égal à 63, les deux racines positives de l'équation

$$(1) \qquad px^7 - 2m^4x^4 + 2pm^4x^3 + 2m^8 = 0$$

sont comprises, l'une entre $p \times 3,8$ et $p \times 3,9$, et l'autre entre $p \times 3,9$ et $4p$.

Si $\frac{m^4}{p^4} = 64$, la plus grande des deux racines positives de l'équation est $4p$, et la plus petite est comprise entre $p \times 3,7$ et $p \times 3,8$. G.