NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

VICTOR-ALEXANDRE CHORON

Concours d'admission à l'École polytechnique en 1866. Composition mathématique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 252-258

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__252_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1866.

Composition mathématique;

PAR M. VICTOR-ALEXANDRE CHORON (*).

ÉNONCÉ. — *Étant données une parabole*

$$y^2 = 2px$$

(*) Cet elève a ete admis le PREMIER.

et une hyperbole équilatère

$$xy = m^2$$

ayant pour asymptotes l'axe et la tangente au sommet de la parabole, on propose :

1° *De former l'équation ayant pour racines les abscisses ou les ordonnées des pieds des normales communes aux deux courbes;*

2° *De déduire de cette équation que le nombre des normales communes réelles est au moins* un *et au plus* trois;

3° *De démontrer que lorsque $7p^4$ est $> 2m^4$, il n'y a qu'une normale commune réelle.*

Soit MP une normale commune à la parabole et à l'hyperbole données, soit M le point où elle est normale à l'hyperbole. Je désigne par x et y les coordonnées du point M; j'aurai entre x et y la relation

$$xy = m^2.$$

L'équation de la normale MP au point M sera, X et Y étant les coordonnées courantes,

$$\frac{X - x}{y} = \frac{Y - y}{x}.$$

Je calcule l'abscisse à l'origine $OA = X_a$ de cette droite; j'aurai

$$X_a = \frac{x^2 - y^2}{x}.$$

Dans une parabole, la sous-normale est constante et égale à p; si la droite MP est normale à la parabole, son pied aura nécessairement pour abscisse $X_a - p$, et si le point de la droite MP dont l'abscisse est égale à $X_a - p$ se trouve situé sur la parabole, le même théorème montre que la droite MP sera normale à la parabole en ce point.

Je calcule l'ordonnée du point de la droite dont l'abscisse est égale à $X_a - p$; cette ordonnée est égale à $y - \frac{x}{y}\left(\frac{y^2}{x} + p\right)$ ou à $-\frac{px}{y}$. J'exprime que le point $\left(\frac{x^2 - y^2}{x} - p,\ -\frac{px}{y}\right)$ est situé sur la parabole par la relation

$$(1) \qquad \frac{p^2 x^2}{y^2} = 2p\left(\frac{x^2 - y^2}{x} - p\right).$$

Cette équation, jointe à la relation

$$xy = m^2,$$

détermine les coordonnées des points où les normales communes cherchées sont normales à l'hyperbole.

Pour avoir l'équation qui définit les abscisses de ces points, il me suffit de remplacer y par $\frac{m^2}{x}$ dans l'équation (1); il me vient ainsi

$$\frac{p^2 x^4}{m^4} = 2p\left(\frac{x^2 - \frac{m^4}{x^2}}{x} - p\right),$$

ou, ramenant à une forme entière et ordonnant,

$$(2) \qquad px^7 - 2m^4 x^4 + 2m^4 px^3 + 2m^8 = 0.$$

Avant de discuter cette équation, je remarque qu'à chaque racine réelle trouvée pour x correspondra une normale commune, et une seule normale commune. Car cette valeur de x définira un point réel et un seul sur l'hyperbole

$$xy = m^2.$$

Ensuite la normale menée en ce point sera normale à la parabole en un point réel

$$\frac{x^2 - y^2}{x} - p, \quad -\frac{px}{y}.$$

Cela posé, je discute l'équation (2). Il y a une lacune de deux termes entre le terme en x^7 et le terme en x^6. Comme une lacune de deux termes fait toujours perdre deux variations à la somme des variations d'un polynôme ordonné et du polynôme obtenu par le changement de x en $-x$, l'existence de cette lacune m'apprend que l'équation (2) a forcément des racines imaginaires. Une seconde lacune de deux termes entre le terme en x^3 et le terme indépendant m'apprend l'existence de deux autres racines imaginaires. Ainsi l'équation (2) ne saurait avoir plus de trois racines réelles; d'ailleurs, comme elle est de degré impair, elle admet toujours au moins une racine réelle, d'ailleurs négative.

La dérivée du premier membre de l'équation est

$$x^2(7px^4 - 8m^4x + 6m^4p).$$

Pour que l'équation (2) ait plus d'une racine réelle, il faut que cette dérivée puisse changer de signe ou que $7px^4 + 8m^4x + 6m^4p$ puisse s'annuler pour des valeurs réelles de x. Je prends encore la dérivée, et j'obtiens

$$4(7px^3 - 2m^4).$$

L'équation que j'obtiendrai en égalant cette dérivée à o ne pouvant avoir qu'une seule racine, la dérivée première ne pourra s'annuler pour plus de deux valeurs réelles de x, et la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle ait effectivement deux racines réelles sera que le résultat de la substitution de $\sqrt[3]{\frac{2m^4}{7p}}$ dans $7px^4 - 8m^4x + 6m^4p$

soit négatif. On devra donc avoir

$$2m^4\sqrt[3]{\frac{2m^4}{7p}} - 8m^4\sqrt[3]{\frac{2m^4}{7p}} + 6m^4p < 0,$$

$$-\sqrt[3]{\frac{2m^4}{7p}} + p < 0,$$

$$p < \sqrt[3]{\frac{2m^4}{7p}},$$

$$7p^4 < 2m^4.$$

Ainsi, quand $7p^4$ sera plus grand que $2m^4$, la dérivée première ne pourra jamais changer de signe et l'équation en x n'aura qu'une seule racine réelle; quand $7p^4$ sera plus petit que $2m^4$, la dérivée changera deux fois de signe. Ainsi l'inégalité

$$7p^4 < 2m^4$$

est nécessaire et non suffisante pour qu'il y ait trois racines réelles, et par conséquent pour qu'il puisse y avoir trois normales communes réelles.

L'équation qui donnerait les ordonnées les pieds des normales relatifs à l'hyperbole serait l'équation en x, où je remplacerais x par $\frac{m^2}{y}$:

$$p\frac{m^{14}}{y^7} - 2m^4\frac{m^8}{y^4} + 2m^4p\frac{m^6}{y^3} + 2m^8 = 0,$$

$$2y^7 + 2m^2py^4 - 2m^4y^3 + pm^6 = 0.$$

Raisonnant comme tout à l'heure, j'aurai

$$f'_y = 2(7y^6 + 4m^2py^3 - 3m^4y^2).$$

Prenant encore la dérivée de $7y^4 + 4m^2py - 3m^4$, il me vient $4(7y^3 + m^2p)$, qui change de signe pour la valeur $-\sqrt[3]{\frac{m^2 p}{7}}$ attribuée à y. Posant encore

$$f'\left(-\sqrt[3]{\frac{m^2 p}{7}}\right) < 0,$$

j'arrive à

$$-p\sqrt[3]{\frac{m^2 p}{7}} - m^2 < 0,$$

condition toujours remplie. Ainsi la considération de l'équation aux ordonnées fournit des résultats beaucoup moins avantageux que la considération de l'équation aux abscisses; l'une donnait au moins une restriction pour la réalité des racines, la seconde ne fournit rien.

Je vais maintenant former l'équation qui donne les ordonnées des pieds des normales communes relatifs à la parabole (*).

Si dans l'équation (2) je remplaçais y par $\sqrt{2px}$, j'obtiendrais une équation du septième degré en $\sqrt{x}$; chaque valeur réelle de $\sqrt{x}$ me fournirait une valeur positive de x; substituant cette valeur de x dans l'équation

$$y^2 - 2px = 0,$$

et prenant seulement la valeur négative du radical $\sqrt{2px}$, je vois qu'à chaque valeur réelle de $\sqrt{x}$ correspond une valeur admissible de y, et une seule.

Le texte qui m'a été remis demandait de démontrer qu'il ne pouvait y avoir qu'une seule normale commune lorsque m et p satisfont à l'inégalité

$$7p^4 < 2m^4,$$

et j'ai trouvé que cette inégalité était au contraire néces-

(*) Nous omettons ce calcul bien superflu, après ce qui vient d'être dit et où il s'est glissé une légère faute : $+4$ au lieu de -8.

saire pour qu'il pût y avoir trois normales communes; je crois bien qu'il y a dans le texte une faute d'impression. Si je suppose que p devienne de plus en plus grand, la parabole s'élève de plus en plus rapidement au-dessus de son axe; ainsi, dans la *fig.* 1, les ordonnées croissent très-rapidement, et l'œil conçoit mal que l'on puisse mener plusieurs normales communes. Si, au contraire, j'attribue à p une valeur assez petite pour que la parabole soit très-aplatie, comme dans la *fig.* 2, l'œil aperçoit beaucoup mieux la possibilité de mener trois normales communes (*).