Nouvelles annales de mathématiques

J. Steiner

Géométrie des courbes sur les dépendances mutuelles des tangentes doubles des courbes du quatrième degré

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 241-252

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__241_0>

GÉOMÉTRIE DES COURBES (*).

Sur les dépendances mutuelles des tangentes doubles des courbes du quatrième degré;

PAR M. J. STEINER.

Depuis que M. Poncelet a, pour la première fois, appelé l'attention sur l'existence des tangentes doubles des courbes algébriques (**), on s'est peu occupé d'en étudier les propriétés essentielles. Cependant on est parvenu depuis à déterminer le nombre de ces tangentes d'après celui des points d'inflexion en se fondant sur la théorie des polaires réciproques, dont les principes ont été également établis par l'auteur précité. J'ai donné, à ce sujet, des formules qui lient entre eux, d'une manière générale, le degré et la classe d'une courbe algébrique avec le nombre de leurs points multiples, de rebroussement, d'inflexion, et celui de leurs tangentes doubles (***). Après bien des tentatives, M. Jacobi est parvenu à déterminer directement et analytiquement le nombre de ces tangentes doubles dans un Mémoire inséré, il y a peu de temps, au *Journal de M. Crelle* (t. XL, p. 237). L'examen des propriétés générales de ces mêmes tangentes doit être plus difficile encore; les mathématiciens qui s'en sont occupés le reconnaîtront sans doute. J'ai

(*) Mémoire inséré par extrait dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XXXVII, p. 121.

(**) *Journal de Mathématiques* de M. CRELLE, t. VIII, p. 401 à 406.

(***) *Monatsbericht der Akad. der Wissenschaften zu Berlin* (august 1848).

essayé, il y a quelques années, de trouver par voie de synthèse les relations mutuelles des 28 tangentes doubles de la courbe du quatrième degré, et je suis arrivé à des résultats qui, en montrant le fond des difficultés inhérentes à ce genre de questions, montrent en même temps la route à suivre pour les aborder et les traiter convenablement. Ces résultats reposent sur une combinaison des éléments donnés d'une complexité extraordinaire et, pour ainsi dire, inextricable. Le petit nombre des essais publiés jusqu'à ce jour par les mathématiciens, sur le même sujet, sont peu d'accord avec les résultats de mon travail, et ce n'est d'ailleurs qu'après l'avoir entièrement terminé que j'ai eu connaissance de ces essais. Les énoncés suivants ont pour but d'en donner une simple idée et de mettre les géomètres sur la voie des solutions ou démonstrations, difficiles sans doute dans l'état présent de l'analyse algébrique, mais que l'on déduira sans trop de peine des propositions fondamentales qui se trouvent rapportées dans mon Mémoire, déjà cité, de 1840 (t. IV du *Journal de M. Crelle*); d'où j'ai déduit, comme première conséquence, la théorie des polaires successives d'une courbe algébrique, d'un degré donné, sur un plan, par rapport à un point ou à une courbe pareille donnée sur ce plan.

I. Qu'on imagine une courbe générale du quatrième degré C^4. Ses 28 tangentes doubles t, arrangées par couples, donneront 378 couples. Désignons chaque couple par π, et le point d'intersection des deux tangentes de chaque couple par p; il y aura pareillement 378 points p. Soient m et n, m_1 et n_1 les points de contact de la courbe avec les deux tangentes du couple quelconque π; joignons ces points par les deux paires de droites mm_1 et nn_1, mn_1 et nm_1 : les deux droites de chaque paire se couperont réciproquement en un point. Appelons q et r les deux points ainsi obtenus. Alors il y aura, pour chaque couple π de tangentes, trois points p, q, r.

II. Les 378 points p, et avec eux les 378 couples π, peuvent être arrangés, 6 par 6, en groupes G, d'après une loi déterminée, de sorte qu'il en naîtra 63 groupes G, dont aucuns n'ont de point p ni de couple π commun avec les autres. Cela posé :

Les 6 *points* p *de chaque groupe* G *sont situés sur une certaine section conique* G^2*, ce qui donne en tout* 63 *sections coniques* G^2.

Les 6 points appartenant à un même groupe sont donnés par 12 tangentes t différentes, c'est-à-dire par 6 couples π n'ayant aucune tangente commune, de sorte que jamais deux points d'un groupe de $6p$ ne sont situés sur une même tangente.

III. Les 8 points de contact de quatre tangentes de deux couples π quelconques d'un même groupe se trouvent toujours sur une certaine section conique B^2, de sorte qu'il y a pour chaque groupe $\frac{1}{2}6 \times 5 = 15$ sections coniques B^2. D'après cela, il devrait y avoir pour les 63 groupes $63 \times 15 = 945$ sections coniques B^2; mais chacune d'elles est comptée trois fois, et n'y a réellement que 315 sections coniques différentes B^2, c'est-à-dire :

Parmi les 28 *tangentes doubles* t *d'une courbe du quatrième degré* C^4*, il y a, en général,* 315 *groupes de* 4 *tangentes telles, que leurs* 8 *points de contact se trouvent sur une même section conique* B^2.

IV. *Les* 18 *points de chaque groupe* G*, savoir : les* $6p$*, les* $6q$ *et les* $6r$ *se trouvent tous sur une certaine courbe du troisième degré* G^3*, de sorte qu'il y a* 63 *courbes* G^3.

16.

Chaque courbe G^3 coupe la courbe donnée C^4 en 12 points a, ce qui donne en tout $63 \times 12 = 756$ points déterminés a. Chacun de ces points jouit de cette propriété : *qu'une certaine section conique* A^2 *peut avoir au point a un contact du troisième ordre et, en outre, encore certains couples points de contact b et c du premier ordre avec la courbe donnée* C^4.

D'après cela,

Étant donnée une courbe du quatrième degré C^4, *si l'on demande une section conique* A^2 *ayant avec elle un point de contact a du troisième ordre et deux autres points de contact b et c du premier ordre, il y aura, en général, 756 solutions du problème.*

Si on joint les trois points a, b et c fournis par une de ces sections coniques par les droites ab, ac et bc, et que l'on mène par le point a les tangentes A et A_1 aux courbes C^4 et G^3, *les quatre droites* ab, A, ac, A_1 *formeront un faisceau harmonique, de sorte que la droite* A_1 *est déterminée par les trois autres; de plus, le point d'intersection* d *des droites* A *et* bc *se trouve sur la courbe* G^3, *de sorte qu'on obtient* 12 *nouveaux points* d *de cette courbe.*

Les 84 *droites appartenant à chaque groupe* G, *savoir : les* 6 *couples* π *de tangentes (équivalant à* 12 *droites* t) ; *les* 6 *fois* 4 *droites* mm_1, nn_1, mn_1 *et* nm_1 ; *les* 12 *tangentes* A, *et enfin les* 12 *fois* 3 *droites* ab, ac *et* bc *sont toutes tangentes d'une certaine courbe de la troisième classe* K^3 (*du sixième degré*) ; *et les droites* ab *et* ac, *en particulier, ont les points* b *et* c *eux-mêmes pour points de contact avec elle, de sorte que les* 12 b *et les* 12 c *sont en même temps les* 24 *points d'intersection de cette courbe* K^3 *avec la courbe donnée* C^4. *Enfin il y a en tout* 63 *courbes* K^3.

Les deux courbes G^3 et K^3, appartenant à un même groupe, ont entre elles des relations intimes, dont nous indiquerons quelques-unes. Désignons par w chacun des 9 points d'inflexion de la courbe G^3, et par W la tangente en ce point; de chaque point w on peut mener trois tangentes Q, Q_1, Q_2 à la courbe, dont les points de contact q, q_1, q_2 sont situés sur une droite R_1. Appelons p le point d'intersection de W avec R_1. Désignons par R la tangente à chacun des 9 points de rebroussement de la courbe K^3, et par r' l'un de ces points de rebroussement; chaque tangente R coupe la courbe aux trois points q, q', q'', et les tangentes en ces points, Q, Q', Q'', se coupent toutes les trois en un point w. Appelons P la droite $r\omega_1$. *Les courbes* G^3 *et* K^3 *ont entre elles ces relations : qu'elles se touchent aux* 9 *points* q, *et que, par suite, les* 9 *droites* Q *sont leurs tangentes communes en ces points* q*; que les* 9 *couples de points* w *et* w_1, *aussi bien que les* 9 *couples de droites* R *et* R_1, *coïncident; enfin que les* 4 *droites* W, Q', Q, Q'', *aussi bien que les* 4 *points* r, q_1, q, q_2, *sont harmoniques, et que, par suite, les* 4 *droites* P, Q_1, Q, Q_2 *sont également harmoniques.*

Je réserve pour une autre occasion des discussions plus détaillées sur les autres relations des deux courbes.

V. Les 63 groupes G (II) peuvent être arrangés, 3 par 3, en systèmes S, d'après une loi telle, que pour deux groupes quelconques il en existe *toujours un troisième, mais un seul,* qui fasse un système S avec les deux autres. D'après cela, le nombre de ces systèmes est $= 651$, et chaque groupe appartient à 31 de ces systèmes.

L'ensemble de ces systèmes, d'après une propriété constitutive, se divise naturellement en deux sections. Pour plus de clarté nous désignerons par S_1 et S_2 les systèmes appartenant à ces sections : la première section contient 315 systèmes S_1, la seconde 336 systèmes S_2, et chaque groupe G appartient à 15 systèmes S_1 et à 16 systèmes S_2.

Les systèmes respectifs de chacune de ces deux sections ont entre autres les caractères distinctifs suivants :

1° Les trois groupes de chaque système S_1 ont toujours 4 tangentes doubles communes telles, qu'elles forment dans chaque groupe deux couples π. Soient, par exemple, u, x, y et z les quatre tangentes t communes, il faudrait que ux et yz fussent les couples d'un des trois groupes, uy et xz les couples d'un second groupe, et uz et xy les couples du troisième groupe. D'après cela, les 8 points de contact de quatre tangentes pareilles u, x, y et z se trouvent toujours sur une section conique B^2 (III). Les trois groupes embrassent toutes les 28 tangentes doubles t, et quatre de celles-ci, u, x, y et z, sont employées chacune trois fois.

2° Au contraire, les trois groupes de chaque système S_2 ne contiennent ensemble que 18 tangentes doubles t, chacune de ces dernières appartenant à deux groupes, de sorte que deux quelconques des trois groupes ont 6 tangentes communes ; ou bien, si nous désignons les 18 tangentes par a, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ; b, b_1, b_2,..., b_5 ; c, c_1, ... , c_5, il faudrait, par exemple, que

ab, $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$, $a_4 b_4$, $a_5 b_5$ fussent des couples d'un premier groupe ;

ac, $a_1 c_1$, $a_2 c_2$, $a_3 c_3$, $a_4 c_4$, $a_5 c_5$, des couples d'un second groupe,

Et bc, $b_1 c_1$, $b_2 c_2$, $b_3 c_3$, $b_4 c_4$, $b_5 c_5$, des couples du troisième groupe.

Abstraction faite de ces différences, tous les systèmes ont la propriété commune suivante :

Si l'on choisit dans chacun des trois groupes d'un sys-

tème S *un couple quelconque* π *de tangentes doubles, les* 12 *points de contact de ces tangentes se trouveront à la fois sur une certaine courbe du troisième degré* B^3

D'après la règle des combinaisons, on aura, pour chaque système S,

$$6 \times 6 \times 6 = 216$$

courbes B^3, et en tout

$$63 \times 216 = 14016$$

courbes B^3. Mais alors chaque courbe se trouve être comptée plus ou moins souvent, de sorte que le nombre des courbes B^3 différentes les unes des autres est bien moindre. De plus, B^3 n'est pas toujours une courbe de la forme générale; au contraire, dans le plus grand nombre des cas, elle se décompose en une section conique et une droite, ou bien en trois droites; et ces sections coniques ne sont autres que les 315 sections coniques B^2 (III), et les droites ne sont autres que les 28 tangentes doubles t elles-mêmes. Ces circonstances ont lieu de la manière suivante.

Pour tout système S_1, si nous désignons par t_0 chacune des quatre tangentes communes u, x, y, z, et par B_0^2 la section conique B^2 passant par les 8 points de contact de ces tangentes, les 216 courbes B^3 se composent comme il suit :

a. 4 de trois droites, savoir : de u, x, y, u, x, z, u, y, z et x, y, z;

b. 4 de $B_0^2 + t_0$, c'est-à-dire de B_0^2 et d'une des quatre droites u, x ou y, z;

c. 48 de $B^2 + t_0$, d'une des droites u, x, y, z, avec une section conique B^2,

d. Et 160 de courbes B^3 proprement dites.

Pour tout système S_2, au contraire, les 216 courbes B^3 se composent :

e. 6 de trois droites, savoir : de $a, b, c, a_1, b_1, c_1, \ldots, a_5, b_5, c_5$;

f. 90 de $B^2 + t$, savoir : d'une section conique B^2 avec une des 18 droites $a, a_1, \ldots, a_5$, $b, b_1, \ldots, b_5$, $c, c_1, \ldots, c_5$,

g. Et 120 courbes B^3 proprement dites.

En résumé il y aurait :

α. Courbes B^3, composées de trois droites (a et e) :

$$315 \times 4 + 336 \times 6 = 3276,$$

nombre égal à celui des combinaisons des 28 tangentes doubles prises trois à trois, $= \frac{28 \times 27 \times 26}{1.2.3}$.

β. Courbes B^3, composées de $B_0^2 + t_0$, la section conique B_0^2 passant par les points de contact de la tangente t_0 (b) :

$$315 \times 4 = 1260.$$

γ. Courbes B^3, composées de $B^2 + t$, B^2 ne passant pas par les points de contact de t (c et f) :

$$315 \times 48 + 336 \times 6 = 45360.$$

δ. Courbes B^3 proprement dites, non décomposées (d et g) :

$$315 \times 160 + 336 \times 120 = 90720,$$

ce qui fait en total le nombre 140616 énoncé ci-dessus.

7°. Comme il n'y a que 315 sections coniques B^2 (III), tandis que nous venons d'en trouver 45360 (γ), il faut que chacune d'elles ait été employée 144 fois; de plus, elle est chaque fois liée à une des 24 tangentes t, par les points de contact desquelles *elle ne passe pas*. Il faut donc qu'elle soit employée dans cette liaison avec chacune de ces tangentes $\frac{144}{24} = 6$ fois. De sorte que le nombre des $B^2 + t$ données sous (γ), mais différentes l'une de l'autre, se réduit à

$$\frac{45360}{6} = 7560,$$

en observant que toujours 24 de ces $B^2 + t$ contiennent la même section conique B^2, et ne diffèrent l'une de l'autre que par la tangente t.

δ^o. De plus, comme toute courbe B^3, énoncée sous (δ), passe par les points de contact de 6 tangentes t, lesquelles sont employées 15 fois sous la forme de 3 couples π, cette courbe se trouve répétée 15 fois, de sorte qu'il n'y a en effet que

$$\frac{90720}{15} = 6048$$

courbes B^3 proprement dites, différentes l'une de l'autre.

D'après cela, le nombre réel des courbes B^3 différentes l'une de l'autre est :

[α]. 3276, composées chacune de $3t$;
[β]. 1260, composées de $B^2_0 + t_0$;
[γ^o]. 7560, composées de $B^2 + t$,
[δ^o]. 6048 courbes B^3 proprement dites.
Somme totale = 18144.

Le résultat principal est contenu sous (δ^o), savoir :

Parmi les 28 *tangentes doubles t d'une courbe du quatrième degré, il y a en général* 6048 *fois* 6 *tangentes telles, que leurs* 12 *points de contact se trouvent sur une courbe du troisième degré* B^3 *proprement dite, c'est-à-dire non décomposée.*

VI. Les 63 groupes G (II) peuvent être arrangés 4 par 4 en systèmes S [4], tels que pour trois groupes quelconques, mais qui ne constituent pas un système S (V), il y a *toujours un quatrième groupe, mais* *un seul,* qui forme un système S [4] avec les trois autres, et ce quatrième groupe ne doit pas non plus former un système S avec deux quelconques de ceux-ci. Cela posé, il existe en totalité 9765 systèmes S [4] qui jouissent, entre autres, de la propriété commune suivante :

Si l'on choisit dans chacun des quatre groupes d'un système S [4] *un couple quelconque* π *de tangentes doubles, les* 16 *points de contact de ces tangentes se trouveront à la fois sur une courbe du quatrième degré* B^4.

VII. Pareillement les 63 groupes peuvent être arrangés, 5 par 5, en systèmes S [5], tels que, pour quatre groupes quelconques qui ne forment entre eux ni un système S (V) ni un système S [4] (VI), il y a *toujours un cinquième groupe, mais un seul,* qui forme un système S [5] avec les quatre autres, et ce cinquième groupe ne doit pas non plus former ni avec deux ni avec trois des quatre premiers groupes l'un des systèmes énoncés précédemment. Il existe 109368 pareils systèmes S [5], tous distincts entre eux, et jouissant de la propriété suivante :

Si l'on choisit dans chacun des cinq groupes d'un système S [5] *un couple quelconque* π *de tangentes doubles, les* 20 *points de contact de ces tangentes se trouveront à la fois sur une courbe du cinquième degré* B^5.

VIII. Les 63 groupes G peuvent être arrangés encore 6 par 6, en systèmes S [6], tels que pour cinq groupes quelconques, qui ne forment entre eux aucun des systèmes indiqués précédemment, il existe *toujours un sixième groupe, mais un seul,* qui ne doit former non plus, ni avec deux, ni avec trois, ni avec quatre des cinq premiers groupes, un des systèmes déjà énoncés. Le nombre de ces systèmes S [6] s'élève à 874944, et, *Si l'on choisit dans chacun des six groupes d'un système* S [6] *un couple quelconque* π *de tangentes doubles, les* 24 *points de contact de ces tangentes se trouveront à la fois sur une courbe du sixième degré* B^6.

IX. Enfin les 63 groupes peuvent être arrangés en systèmes S [7] de 7 et 7 groupes, de sorte que pour six groupes quelconques, ne formant entre eux aucun des systèmes déjà énoncés, il y a *toujours un certain* septième groupe qui ne doit former ni avec deux, ni avec trois, ni avec quatre, ni avec cinq de ces six groupes un des systèmes énoncés. Le nombre des systèmes S [7] est = 3 999 744.

Si l'on choisit dans chacun des sept groupes d'un système S [7] *un couple quelconque* π *de tangentes, les* 28 *points de contact de ces tangentes se trouveront toujours sur une courbe du septième degré* B^7.

Il n'y a pas de systèmes formés par 8, 9,... groupes.

Remarque. — Il a été dit aux n^os^ VI, VII, VIII et IX que les 16, 20, 24, 28 points de contact se trouvent tous sur une courbe B^4, B^5, B^6, B^7; mais il est bien entendu que ces courbes ne sont pas parfaitement déterminées par ces points, comme l'était la courbe B^3 au n° V. Au contraire, on peut faire passer par ces points un nombre infini de courbes du même degré, et il doit être sous-entendu que ces points jouissent de la propriété qu'on peut faire passer par eux de telles courbes. Si l'on prenait à volonté le même nombre de points sur la courbe C^4, on ne pourrait pas faire passer par eux des courbes des degrés indiqués; car on sait qu'une courbe du degré n, B^n peut avoir $4n$ points d'intersection avec la courbe C^4, et que de ces $4n$ points on ne saurait prendre à volonté que $4n - 3$, les autres trois points étant alors déterminés.

X. Ce qui précède conduit à plusieurs questions ou problèmes, dont voici quelques-uns :

1. *Quels sont les résultats auxquels on parvient en soumettant les systèmes des* n^{os} VI, VII, VIII *et* IX *à des discussions aussi détaillées que celles faites sur les systèmes* S *au* n^{o} V?

Ou bien, on peut demander en particulier :

Combien de fois y a-t-il, parmi les 28 *tangentes doubles t,* 8, 10, 12 *ou* 14 *tangentes telles, que leurs* 16, 20, 24 *ou* 28 *points de contact se trouvent tous sur une courbe proprement dite* B^4, B^5, B^6 *ou* B^7 ?

2. *Quelle est la manière d'être des* 63 *sections coniques* G^2 (II) *à l'égard de leur position relative?*

3. *Quelles sont les relations des* 63 *courbes du troisième degré* G^3 (IV) *entre elles?*

4. *Quelles sont les relations des* 63 *courbes de la troisième classe* K^3 (IV) *à l'égard de leur position?*

Berlin, octobre 1852.