Nouvelles annales de mathématiques

Publications récentes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 231-240

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__231_1>

PUBLICATIONS RÉCENTES.

(Tous les ouvrages annoncés se trouvent à la librairie de *Gauthier-Villars*, quai des Augustins, 55.)

HOÜEL (J.). — *Recueil de formules et de Tables numériques.* 1 vol. in-8 de LXXI-64 pages; 1866. Gauthier-Villars. — Prix : 4 fr. 50 c.

Nous devons déjà à M. Hoüel d'excellentes Tables de logarithmes à cinq décimales qui renferment, outre de nombreuses améliorations, les logarithmes de Gauss, inconnus en France avant cette publication, quoiqu'ils soient d'origine française.

Mieux que personne, M. J. Hoüel pouvait, par la nature de ses études, introduire dans les nouvelles Tables les perfectionnements qui manquaient aux Tables françaises; il a complétement réussi en publiant le nouveau *Recueil* qu'on ne doit pas séparer des Tables de logarithmes à cinq décimales.

Dans ces *Annales*, consacrées particulièrement à l'étude des Mathématiques spéciales, nous n'entreprendrons pas d'analyser complétement ce *Recueil*, dont une partie est destinée aux personnes qui s'occupent des points les plus élevés de la science. Nous nous contenterons d'indiquer aux candidats aux Écoles Polytechnique et Normale l'immense parti qu'ils pourraient tirer des Tables nombreuses et variées que renferme ce petit volume.

Dans les cas ordinaires de la discussion d'un problème, il est très-avantageux d'employer les petites Tables logarithmiques à trois ou quatre décimales. Dans ce nouveau *Recueil* comme dans l'ancien, M. Hoüel a disposé une série complète de ces Tables de la manière la plus commode, tant pour les logarithmes vulgaires que pour les logarithmes népériens.

Il a reproduit avec d'heureuses modifications les Tables de logarithmes d'addition et de soustraction, si utiles dans diverses applications du calcul.

Mais ce qui distingue surtout ce *Recueil*, c'est une collection complète de Tables trigonométriques disposées avec la plus grande simplicité et contenant les valeurs logarithmiques et naturelles des fonctions circulaires, avec trois ou quatre décimales, et pour tous les systèmes de division du quadrant.

Ainsi la Table IX donne les lignes trigonométriques naturelles avec quatre décimales, pour chaque quart de degré. Les Tables X et XI donnent les valeurs logarithmiques de ces lignes, la première de 10 en 10 minutes, la seconde de 6 en 6 minutes ou de dixième en dixième de degré. Elles contiennent en outre de petites Tables à trois décimales donnant les logarithmes des sinus et des tangentes pour chaque degré. Ces Tables nous ont semblé précieuses pour la préparation ou la vérification des calculs.

Viennent ensuite des Tables trigonométriques à trois et quatre décimales, relatives à la division décimale du quadrant. Cette division ne présente que des avantages toutes les fois que l'on n'a pas en vue un calcul astronomique ou nautique, fait d'après des données obtenues à l'aide des instruments ordinaires. Lorsque les lignes trigonométriques sont employées simplement comme lignes auxiliaires, il n'y a pas d'hésitation possible entre les deux systèmes, pourvu qu'on ait à sa disposition, comme ici, des Tables commodes pour le système décimal. Celles de M. Hoüel sont, eu égard à leur étendue, les plus complètes et les mieux disposées que nous connaissions.

Ces mêmes Tables contiennent encore les valeurs d'autres fonctions qui ne sont plus une nouveauté qu'en France, et que M. Hoüel a déjà fait connaître dans une Note intéressante insérée dans les *Nouvelles Annales* (2e série, t. III, 1864). Nous voulons parler des fonctions hyperboliques, qui jouent dans l'analyse un rôle tout pareil à celui des fonctions circulaires, et qui, par exemple, conduisent de la manière la plus simple à la résolution de l'équation du troisième degré dans le cas d'une seule racine réelle.

Nous citerons encore, parmi les Tables qui peuvent être d'une grande utilité pour nos élèves, la Table des carrés et les petites Tables de puissances qui terminent le volume.

Il serait à désirer, pour que ce *Recueil* devînt promptement populaire, que l'auteur et l'éditeur se décidassent à faire un extrait exclusivement destiné aux lycées; mais telles qu'elles sont, les nouvelles Tables auront le succès qui ne peut manquer aux œuvres consciencieuses.

Nous croyons donc pouvoir les recommander sérieusement à toutes les personnes qui pensent avec M. Hoüel que le calcul numérique employé avec discernement peut devenir un puissant auxiliaire de la théorie et former par lui-même un excellent exercice intellectuel.

Nous ne recommandons pas moins la possession de ce volume aux amateurs de belles impressions, la maison Gauthier-

Villars s'étant surpassée elle-même dans l'exécution d'une œuvre si pleine de difficultés typographiques (*).

C.-H. Berger,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Charlemagne.

Duhamel, Membre de l'Institut. — *Des Méthodes dans les sciences de raisonnement.* In-8° de x-94, xiv-450 pages; 1865-1866. Gauthier-Villars. — Prix : 1re *Partie*, 2 fr. 50 c.; 2e *Partie*, 6 fr. 50 c.

La langue des Mathématiques, comme toutes les langues, s'est formée progressivement par l'usage et à l'aide de conventions qui n'ont point toujours été explicites. Des locutions, suggérées par l'analogie, se sont imposées pour ainsi dire aux savants, presque à leur insu et sans qu'ils se rendissent bien compte de leur portée (**). Cependant ces locutions dérivaient

---

(*) En 1771, Cartault, commis principal de la Marine, mort le 26 octobre 1784, a offert à l'Académie des Sciences des Tables de logarithmes à sept décimales qui s'étendent jusqu'à 250 000. Une copie de ces Tables en deux volumes in-folio a été donnée par l'auteur à de Lalande en 1772 et est passée plus tard dans la bibliothèque de Delambre. J'ignore ce qu'elle est devenue; mais il existe une autre copie en deux volumes in-quarto, aujourd'hui en ma possession, et sur laquelle se lit la note suivante, de la main de Cartault : « Toutes les corrections qui se trouvent tant dans l'Instruction que dans la Table des logarithmes ont été faites par moi-même avec la plus grande attention. C'est d'après ces corrections que j'ai fait faire et que j'ai vérifié moi-même la copie exacte de l'Instruction (*a*) et des logarithmes, laquelle copie a été remise au dépôt de l'Académie royale des Sciences. On peut en toute sûreté s'en servir pour l'impression lorsqu'on le jugera à propos. » La Table est à simple entrée. Chaque page renferme 160 logarithmes disposés sur quatre colonnes.

P.

(*a*) J'ai copié aussi moi-même la Table. (*Note marginale de Cartault.*)

(**) Ce caractère du langage mathématique a été bien compris par Rolle, qui, parlant des avantages des quantités négatives, ajoute : « Il ne paroist pas qu'on les ait introduites (les quantités négatives) pour en tirer tous ces avantages, mais il paroist qu'on a été *comme forcé* de les introduire, et qu'il seroit difficile d'en éviter l'expression sans faire un changement très-considérable en Algèbre. » (*Traité d'Algèbre*, p. 16; 1690.)

si naturellement des objets étudiés, qu'elles étaient universellement comprises et acceptées. Les difficultés sont venues lorsqu'on a voulu les expliquer d'une façon abstraite, et indépendamment de toute application sérieuse, dans les Traités d'Algèbre, ces grammaires de la langue mathématique. Pour quelques auteurs, l'Algèbre semble n'être que l'art de deviner des rébus. Quelle lumière pouvez-vous tirer de problèmes dans lesquels de braves gens, interrogés sur leur âge, l'heure qu'il est ou le nombre d'œufs qu'ils ont vendu, font les réponses que vous savez? L'obscurité devenait de plus en plus grande, lorsque deux vrais géomètres, d'Alembert et Carnot, cherchèrent à la dissiper. Mais, faute de distinguer les choses de pure convention de celles dont l'existence est forcée, leurs dissertations ne produisirent pas l'effet qu'on devait attendre d'esprits aussi distingués. De cette méprise naquirent des objections peu fondées sur la règle des signes (*). La prétendue démonstration donnée de cette règle par d'Alembert est une véritable pétition de principe; mais peut-être l'auteur n'y attachait-il pas lui-même une grande valeur, puisqu'il ajoute : « Allez en avant, et la foi vous viendra. » On a critiqué cette pensée, qui est cependant d'une grande justesse. Il ne s'agit pas ici d'une foi aveugle, mais de la confiance raisonnée qui pénètre peu à peu dans l'esprit éclairé par une longue pratique. Nous enseignons aujourd'hui d'une manière plus satisfaisante la théorie des quantités négatives, mais nos élèves n'en possèdent bien toutes les ressources que lorsqu'ils se sont longtemps exercés dans la Trigonométrie et la Geométrie analytique.

Mais, sans renoncer au bénéfice du temps et de l'exercice,

(*) Delambre, plus astronome que géomètre, a néanmoins très-bien vu le peu de fondement de ces objections : « Les signes + et — ont en Algèbre deux significations : ils indiquent l'addition et la soustraction; ils signifient encore qu'une quantité est prise avec le signe — en sens contraire de celui qu'elle avait avec le signe +. Si vous confondez ces deux idees, vous pourrez être conduit à quelques conclusions absurdes, mais jamais cet inconvénient n'aura lieu si vous distinguez bien ces deux significations. » (*Rapport sur les progrès des sciences mathématiques*, p. 44, in-4; 1810.)

est-il possible de s'arranger de manière que chaque difficulté puisse être levée au moment où elle se produit? Un ordre convenable, de bonnes définitions, une extrême attention à distinguer ce qui est démontrable de ce qui ne l'est pas, peuvent conduire à ce but que semble s'être proposé M. Duhamel. Pendant près de cinquante années de professorat, M. Duhamel a cherché et réussi à répandre dans le public d'excellentes notions sur les points controversés. Aujourd'hui il consigne dans un livre le résultat de ses nombreuses réflexions et de sa longue expérience; c'est un nouveau service rendu à l'enseignement.

L'ouvrage de l'éminent Professeur se divise en deux Parties. La première est consacrée aux préceptes généraux applicables à toutes les sciences de raisonnement. Elle renferme des règles de logique très-simples, très-claires, que tout le monde admet, et qu'on oublie si facilement dans la pratique. Nous y avons trouvé, entre autres, une excellente refutation de Condillac.

La seconde Partie comprend l'application des méthodes générales à la science des nombres et à celle de l'étendue. A part quelques articles où il y aurait matière à contestation, les Professeurs trouveront dans cette seconde Partie une foule de remarques sensées, écrites dans un style pur et élégant, dont ils tireront certainement profit.

Après avoir rendu hommage au talent de M. Duhamel et reconnu les qualités de son livre, nous sommes obligé, par un devoir sacré, d'en critiquer un passage concernant un géomètre dont la mémoire nous est chère. M. Duhamel, après avoir parlé avec un éloge mérité du théorème de Fourier, indique ensuite les lacunes de ce théorème.

« Il a, comme celui de Descartes, l'inconvénient de laisser croire à la possibilité de racines qui souvent n'existent pas, et de donner lieu à beaucoup de calculs inutiles avant qu'on parvienne à reconnaître leur absence. Cette lacune, dans la théorie de l'illustre géomètre, devait être comblée de son vivant, et, *comme cela était naturel*, par un de ses propres disciples.

» Sturm, qui avait connaissance, *comme il le dit lui-même*, non-seulement des Mémoires publiés par son maître, *mais en-*

core de tous ses travaux manuscrits, et qui pouvait par conséquent juger avec précision ce qui manquait à la théorie, chercha d'abord à bien reconnaître ce qui empêchait Fourier de pouvoir assigner le nombre exact des racines comprises entre deux nombres donnés, et ne permettait d'en indiquer avec certitude qu'une simple limite. Ayant reconnu la cause, il chercha à y remédier en substituant aux fonctions dérivées, employées par Fourier, d'autres polynômes très-différents qui n'offraient plus le même inconvénient. Et alors imitant, *comme il le dit avec naïveté*, les démonstrations de son maître, il est parvenu à la découverte du théorème qui porte son nom et qui permet d'assigner le nombre exact des racines comprises dans un intervalle donné. »

Assurément il est impossible d'imaginer un tour plus ingénieux pour amoindrir une importante découverte et le mérite de son auteur. Il y avait si peu de chose à faire! Le maître avait tracé la route, l'écolier docile avait suivi et trouvé au bout la récompense de son application. Rien de plus simple. Mais si vous remarquez que le maître avait de nombreux disciples auxquels il communiquait libéralement ses idées, que lui-même était depuis plus de trente ans en possession de sa méthode, qu'elle était l'objet constant de ses méditations, vous verrez qu'il ne suffisait pas d'être disciple de Fourier ni même de connaître les manuscrits de l'illustre géomètre.

Le lendemain d'une découverte il ne manque pas de gens qui trouvent la voie aisée pour y parvenir. Mais l'histoire détruit ces faciles théories, en nous montrant des propositions très-voisines dans l'ordre des idées et néanmoins très-séparées dans l'ordre des temps. Si un disciple de Descartes avait découvert, du vivant de ce dernier, le théorème de Fourier, cela aurait paru tout naturel. Cependant la règle de Fourier est venue près de deux cents ans après la règle de Descartes.

Enfin, ce que M. Duhamel appelle *naïveté*, je l'appellerai plutôt franchise, modestie, mémoire du cœur. Sturm avait de grandes obligations à Fourier; il les reconnaît loyalement, sans marchander, avec un complet oubli de lui-même, en ces termes :

« L'ouvrage qui doit renfermer l'ensemble de ses travaux sur l'analyse algébrique n'a pas encore été publié. Une partie du manuscrit qui contient ses précieuses recherches *a été communiqué à quelques personnes*. M. Fourier a bien voulu m'en accorder la lecture, et j'ai pu l'étudier à loisir. Je déclare donc que j'ai eu pleine connaissance de ceux des travaux inédits de M. Fourier qui se rapportent à la théorie des equations, et je saisis cette occasion de lui témoigner la reconnaissance dont ses bontés m'ont pénétré. C'est en m'appuyant sur les principes qu'il a posés et en imitant ses démonstrations que j'ai trouvé les nouveaux théorèmes que je vais énoncer. » Ces paroles émues font autant d'honneur à Sturm qu'à Fourier. Puissions-nous trouver souvent dans les œuvres des géomètres de *pareilles naïvetés!*

Mais si M. Duhamel fait si petite la part de l'inventeur, reconnaît-il au moins l'importance de l'invention? Pas le moins du monde. M. Duhamel ne dit rien de son importance théorique, si bien démontrée par les travaux de MM. Sylvester, Cayley et autres. Il se borne à insister sur des inconvénients pratiques.

« Malheureusement, continue M. Duhamel, l'application de ce théorême n'est pas aussi facile que celle du théorème de Fourier : les calculs sont très-longs, par conséquent *exposés à des erreurs qui pourraient en infirmer les conséquences*. On peut bien quelquefois les éviter par des remarques particulières, mais *tout le monde ne peut pas les faire*, et l'on a besoin de procédés que tout *le monde puisse employer avec le même succès*. Il est vrai que ces longs calculs pourraient servir dans le cas où l'on appliquerait la théorie des racines égales; mais enfin, pour le but même que se propose le théorème, le grand avantage qu'il procure est quelquefois acheté un peu cher. »

Il serait vraiment trop naïf de réfuter les objections tirées de la maladresse possible ou de l'ignorance des calculateurs. L'objection, je ne dirai pas la plus sérieuse, mais la plus spécieuse, est celle tirée de la longueur du calcul. Sur ce point,nous sommes heureux de céder la parole à Sturm, qui, comme on va le voir, ne laissera rien subsister des raisons de son contradicteur :

« M. Duhamel n'a d'autre objection à faire contre ma méthode que la longueur des calculs nécessaires pour trouver le plus grand commun diviseur entre le polynôme qu'on égale à zéro et sa fonction dérivée. L'objection tombe plutôt sur la méthode des racines égales que sur mon théorème, et par cela même elle attaque toutes les méthodes connues. Lagrange et tous les géomètres qui se sont occupés des équations numériques ont toujours admis la nécessité et la possibilité de débarrasser une équation de ses racines égales. On sait que le procédé de Lagrange pour réduire les racines réelles en fractions continues ne s'applique qu'au calcul d'une racine simple ou multiple d'ordre impair et ne pourrait pas donner la valeur d'une racine double.

» M. Duhamel n'a pas remarqué que son objection est bien plus forte contre la méthode de Fourier que contre la mienne.... C'est précisément un avantage de mon théorème qu'il se rattache à la théorie des racines égales.

» La recherche de toutes les racines d'une équation est surtout une question de théorie pure qui exige, pour la dignité de l'analyse, une solution d'une généralité et d'une rigueur absolues. Celle de Lagrange et la mienne ont seules ce caractère.

» J'ajoute que mon théorème sur les équations ne doit pas être considéré comme isolé. Il se rattache à une méthode générale de résolution qui s'applique à certaines équations algébriques déterminées qu'on rencontre dans les problèmes les plus importants de la Mécanique céleste, de l'Astronomie et de la Physique mathématique. Mon travail sur les équations linéaires du deuxième ordre, qui m'a fait trouver les propriétés des racines des équations transcendantes, n'est qu'une partie de cette théorie générale (*), et ce n'est qu'en suivant cette voie qu'on pourra savoir quelque chose sur les équations à différences partielles d'ordres supérieurs.

(*) J'ajouterai que ce travail est le point de départ du célèbre théorème, au dire de Sturm qui devait le savoir. La marche de l'inventeur n'a donc pas été celle que M. Duhamel suppose (*voir* plus haut, p. 237).

P.

» Les équations qu'on peut avoir à résoudre ne doivent pas être séparées du problème qui les amène. Leur génération donne le système de fonctions auxiliaires le plus simple possible, propre à faire découvrir ces racines.

. . . .

» Au surplus, j'offre à M. Duhamel une discussion verbale sur tous ces points qu'il serait trop long de traiter par écrit. En attendant, je lui proposerai de résoudre l'équation suivante :

$$10x^4 - 5x^3 - 76x^2 + 58x - 11 = 0,$$

sans faire usage de mon théorème et en écrivant tous ses calculs. Je l'ai choisie aussi simple qu'il m'a été possible, pour ne pas abuser de son temps. »

C'est ainsi que Sturm répondait à M. Duhamel il y a trente-huit ans. Nous croyons inutile d'y rien ajouter.

E. Prouhet.

P. S. — A partir de 1868, le théorème de Sturm fera partie des connaissances exigées des candidats à l'École Polytechnique.