NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

AUG. POULAIN

Théorèmes généraux sur les équations algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 21-33

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__21_0>

THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES;

PAR M. AUG. POULAIN, S. J. (*).

Les questions 777, 778 et 779 répondent à un problème assez général. On peut former avec elles une suite de théorèmes constituant un ensemble, et donnant certains procédés pour obtenir des équations ayant *au plus*, ou ayant *au moins*, autant de racines réelles qu'une équation algébrique donnée (**). C'est cette disposition que nous adopterons.

1. THÉORÈME I. — *Soit k une quantité réelle arbitraire: l'équation*

$$(1) \qquad f(x) + kf'(x) = 0$$

a au moins *autant de racines réelles que $f(x) = 0$.*

Première démonstration. — Soient a, b deux racines réelles consécutives de $f(x)$. Substituées dans le premier membre de (1), elles donnent successivement

$$kf'(a), \quad kf'(b).$$

Ces deux résultats étant, on le sait, de signes contraires, il s'ensuit que l'équation (1) a au moins une racine réelle entre deux consécutives de la proposée. Donc, si cette dernière a n racines réelles, l'équation (1) en a au moins $n-1$. Donc elle en a au moins n; car, dans

(*) Cet article renferme la solution des questions 777 à 779. Il nous a été remis par l'auteur, alors que les solutions insérées au numéro de novembre 1866 étaient sous presse. P.

(**) Nous ne parlons que des equations algébriques à coefficients réels.

deux équations de même degré, le nombre des racines réelles a le même degré de parité.

2. *Deuxième démonstration.* — Posons

$$y = k e^{\frac{x}{k}} . f(x);$$

nous en tirons

$$y' = e^{\frac{x}{k}} [f(x) - k f'(x)]$$

y et y' étant continues, on peut leur appliquer le théorème de Rolle. Soit n le nombre des racines réelles de $f(x)$; $e^{\frac{x}{k}}$ ne pouvant s'annuler, y a précisément n racines réelles. Donc y' et, par là même, le second facteur de y', en a au moins $n - 1$. Donc ce facteur en a au moins n, car il est de même degré que $f(x)$.

3. Théorème II. — *L'équation*

$$(2) \quad F(x) = f(x) + af'(x) + a^2 f''(x) + \ldots + a^m f^m(x),$$

dans laquelle a est une quantité réelle arbitraire, a au plus autant de racines réelles que l'équation $f(x) = 0$.

Ce théorème, qui n'est que la question 777 généralisée, donne une sorte de contre-partie du théorème I.

Première démonstration. — On a évidemment

$$F(x) = f(x) + aF'(x);$$

d'ou

$$(3) \qquad f(x) = F(x) - aF'(x).$$

Si $f(x)$ a n racines réelles, je dis que $F(x)$ n'en a pas *plus* de n. Car autrement $F(x) - aF'(x)$ en aurait plus de n, d'après le théorème I. Or cette expression étant précisément égale à $f(x)$, en vertu de l'égalité (3), cette hypothèse est impossible.

Deuxième démonstration. — On raisonne comme au théorème I sur l'expression

$$y = e^{-ax}\left[\frac{f(x)}{a} + \frac{f'(x)}{a^2} + \ldots + \frac{f^{m}(x)}{a^{m+1}}\right],$$

dont la dérivée est

$$y' = e^{-ax}.f(x).$$

4. Théorème III. (Généralisation du théorème I.) — *Soient*

$$(4) \qquad f(x) = 0$$

une équation algébrique donnée, et

$$(5) \qquad \varphi(z) = 1 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_p z^p,$$

une équation auxiliaire en z, satisfaisant à cette seule condition que toutes ses racines soient réelles. Son degré p peut être quelconque par rapport au degré m de l'équation (4). *Je dis que l'équation*

$$(6)\ F(x) = f(x) + A_1 f'(x) + A_2 f''(x) + \ldots + A_p f^p(x) = 0,$$

formée à l'aide des deux précédentes, a au moins *autant de racines réelles que la proposée*

$$f(x) = 0.$$

Je dis que le théorème est vrai dans le cas où l'équation auxiliaire $\varphi(z) = 0$ est de degré p, pourvu qu'il soit vrai lorsqu'on prend à sa place l'équation de degré $p - 1$

$$\varphi_1(z) = \frac{\varphi(z)}{1 - kz} = 1 + A'_1 z + A'_2 z^2 + \ldots + A'_{p-1} z^{p-1} = 0,$$

$\frac{1}{k}$ étant une des racines de $\varphi(z) = 0$.

En effet, formons l'expression

$$(7)\quad F_1(x) = f(x) + A'_1 f'(x) + A'_2 f''(x) + \ldots + A'_{p-1} f^{p-1};$$

puis cette autre

$$(8)\qquad F_2(x) = F_1(x) - k F'_1(x).$$

Développée, celle-ci donne

$$(9)\quad \left\{ \begin{array}{l} F_2(x) = f(x) + \begin{array}{c} A'_1 \\ -k \end{array}\Big| f'(x) + \begin{array}{c} A'_2 \\ -k \end{array}\Big| f''(x) + \ldots + \begin{array}{c} \\ -k \end{array}\Big| f^p \\ \qquad = f(x) + A_1 f'(x) + A_2 f''(x) + \ldots + A_p f^p; \end{array} \right.$$

car il est facile de s'assurer que

$$1, \quad A'_1 - k, \quad A'_2 - k, \ldots, \quad -k$$

sont les coefficients successifs de

$$\varphi_1(z)(1 - kz) = \varphi(z).$$

Par hypothèse, $F_1(x)$ a *au moins* autant de racines réelles que $f(x)$. Mais k étant réel, puisque $\varphi(z) = 0$ n'a que des racines réelles, l'équation (8) montre que $F_2(x)$ a *au moins* autant de racines réelles que $F_1(x)$. Donc....

On voit donc comment, de proche en proche, on est amené à démontrer le théorème dans le cas où l'équation auxiliaire est du premier degré. Mais alors l'énoncé n'est autre que celui du théorème I. Donc....

5. Théorème IV. (Généralisation du théorème II.) — *Soient*

$$(10)\qquad f(x) = 0$$

une équation algébrique donnée,

$$(11)\qquad \varphi(z) = 1 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_p z^p = 0$$

une équation auxiliaire en z, dont toutes les racines *sont réelles, mais dont le degré p est quelconque par rapport au degré m de $f(x) = 0$,*

(12) $$\psi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \ldots$$

le polynôme obtenu en développant le quotient $\frac{1}{\varphi(z)}$, *suivant les puissances croissantes de z : je dis que l'équation*

(13) $$F(x) = f(x) + B_1 f'(x) + B_2 f''(x) + \ldots + B_m f^m(x) = 0,$$

formée à l'aide des deux précédentes, a au plus *autant de racines réelles que la proposée.*

Nous avons dit que ce théorème est une généralisation du théorème II. En effet, dans celui-ci on a

$$\psi(z) = 1 + az + a^2 z^2 + \ldots.$$

Ce polynôme est le quotient de 1 par $1 - az$.

Démonstration du théorème. — Montrons 1° que l'équation

(14) $$F(x) = f(x) + S_1 f'(x) + S_2 f''(x) + \ldots + S_m f^m(x)$$

a *au plus* autant de racines réelles que $f(x) = 0$, S_n étant le polynôme homogène complet de p variables et de degré n, formé avec les inverses des racines de $\varphi(z) = 0$, dans lequel tous les termes distincts ont pour coefficient l'unité. En un mot, si on appelle $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, ... les racines de $\varphi(z) = 0$, on a

$$S_1 = \sum a,$$

$$S_2 = \sum a^2 + \sum ab,$$

$$S_3 = \sum a^3 + \sum a^2 b + \sum abc,$$

. . . .

Je dis que la proposition est vraie dans le cas où l'équation auxiliaire $\varphi(z) = 0$ est de degré p, pourvu qu'elle soit vraie lorsqu'on prend à sa place l'équation de degré $p - 1$,

$$\varphi_1(z) = \frac{\varphi(z)}{1 - kx} = 0,$$

$\frac{1}{k}$ étant une des racines de $\varphi(z) = 0$.

En effet, S'_1, S'_2,... étant déduites de $\varphi_1(z)$ comme S_1, S_2,... le sont de $\varphi(z)$, formons l'expression

$$(15) \quad F_1(x) = f(x) + S'_1 f'(x) + S'_2 f''(x) + \ldots + S'_m f^m(x),$$

puis cette autre

$$(16) \quad F_2(x) = F_1(x) + kF'_1(x) + k^2 F''_1(x) + \ldots + k^m F^m_1(x).$$

Développée, celle-ci donne

$$F_2(x) = f(x) + \begin{array}{l|l|l|l} S'_1 & f'(x) + S'_2 & f''(x) + \ldots + S'_m & f^m \\ + k & \quad + kS'_1 & \quad + \ldots + kS'_{m-1} & \\ & \quad + k^2 & \quad + \ldots + k^2 S'_{m-2} & \\ & & \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ & & \qquad\qquad + k^m & \end{array}$$

$$= f(x) + S_1 \quad f'(x) + S_2 \quad f''(x) + \ldots + S^m f_m(x).$$

Le reste du raisonnement est tout semblable à celui du théorème III.

Maintenant je dis 2° que le polynôme

$$(17) \qquad \chi(z) = 1 + S_1 z + S_2 z^2 + \ldots$$

n'est autre que le quotient de 1 par $\varphi(z)$.

Montrons encore que si la proposition est vraie pour

$$\chi_1(z) = 1 + S'_1 z + S'_2 z^2 + \ldots,$$

par rapport à $\varphi_1(z)$, il en est de même dans le cas actuel,

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\varphi(z)} &= \frac{1}{\varphi_1(z)(1-hz)} = \frac{1}{1-hz} + \frac{S'_1 z}{1-hz} + \\ &\quad \frac{S'_2 z^2}{1-hz} + \ldots + \frac{S'_q z^q}{1-hz} + \frac{R_{q+1}}{\varphi_1(z)(1-hz)}, \end{aligned}\right.$$

q étant un nombre quelconque, indépendant du degré p de $\varphi(z)$, et R_{q+1} un reste dont le terme de degré le moins élevé renferme z à une puissance au moins égale à $q+1$. Si l'on désigne par C une certaine quantité qui ne contient pas z, l'équation (18) développée donne

$$\frac{1}{\varphi(z)} = 1 + \left.\begin{array}{l} S'_1 \\ +h \end{array}\right| z + \left.\begin{array}{l} S'_2 \\ +hS'_1 \\ +h^2 \end{array}\right| z^2 + \ldots + \left.\begin{array}{l} S'_q \\ +hS'_{q-1} \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ +h^q \end{array}\right| z^q + \frac{Cz^{q+1}}{1-hz} + \frac{R_{q+1}}{\varphi(z)}$$

$$= 1 + S_1 z + S_2 z^2 + \ldots + S_q z^q + \frac{Cz^{q+1}}{1-hz} + \frac{R_{q+1}}{\varphi(z)}.$$

Si l'on développe les deux dernières fractions, on trouve que tous les termes du développement ont z^{q+1} en facteur : donc elles n'influent pas sur les coefficients des q premiers termes de $\frac{1}{\varphi(z)}$. Donc la loi est vraie pour les q premiers termes. Mais q est quelconque. Donc....

6. Avant de continuer, il est bon de faire une observation sur les polynômes (11) et (12), c'est-à-dire sur $\varphi(z)$ et $\psi(z)$. Arrêtons ce dernier à $B_q z^q$. Si l'on forme le quotient $\frac{1}{\psi(z)}$, on trouve un développement dont l'ensemble des p premiers termes est $\varphi(z)$, pourvu que q ait été pris supérieur ou égal à p.

En effet, R_{q+1} ayant le même sens que précédemment, nous pouvons poser

$$(19)\qquad \frac{1}{\varphi(z)} = \psi(z) + \frac{R_{q+1}}{\varphi(z)};$$

d'où

$$(20)\qquad \frac{1}{\psi(z)} = \varphi(z) + \frac{R_{q+1}}{\varphi(z)}.$$

Donc, si l'on pousse le quotient $\frac{1}{\psi(z)}$ jusqu'au terme en z^p, on retrouve $\varphi(z)$. On peut même le pousser jusqu'au terme en z^q, seulement les $q-p$ derniers coefficients seront nuls. A partir de z^{q+1}, des termes étrangers commenceraient à apparaître.

Si q a été pris inférieur à p, on peut, en calculant le quotient $\frac{1}{\psi(z)}$, retrouver les q premiers termes de $\varphi(z)$, mais au delà les coefficients peuvent différer. Cela se voit au moyen de l'équation (20).

7. Nous avons donné pour chacun des théorèmes II et III une démonstration directe. Il est facile de montrer que l'un quelconque est la conséquence de l'autre.

Pour cela établissons la proposition suivante :

8. *$f(x)$, $\varphi(z)$, $\psi(z)$ étant des polynômes définis comme dans le théorème III, avec cette seule différence que l'équation $\varphi(z) = 0$ n'est plus assujettie à aucune condition, si l'on pose*

$$(21)\quad F(z) = f(x) + A_1 f'(x) + A_2 f''(x) + \ldots + A_m f^m(x),$$

on a inversement

$$(22)\quad f(x) = F(x) + B_1 F'(x) + B_2 F''(x) + \ldots + B_m F^m(x).$$

Dans l'expression (21) nous avons mis en évidence A_m, ce qui semblerait indiquer que $\varphi(z)$ est au moins de degré m; mais c'est uniquement pour introduire plus de symétrie dans les calculs, rien n'empêchant de supposer que A_m, A_{m-1} ...., sont nuls.

Démonstration. — De l'égalité (21) nous tirons successivement

$$(23)\quad \begin{cases} F(x) = f(x) + A_1 f'(x) + A_2 f''(x) + \ldots + A_m f^m(x), \\ F'(x) = \ldots\ldots f'(x) + A_1 f''(x) + \ldots + A_{m-1} f^m(x), \\ F''(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots f''(x) + \ldots + A_{m-2} f^m(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F^m(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots f^m(x). \end{cases}$$

Considérons ces équations comme un système de $m+1$ équations du premier degré propres à donner les $m+1$ inconnues

$$f(x),\quad f'(x),\quad f''(x),\ldots,\quad f^m(x).$$

Tirons la valeur de la première $f(x)$ et constatons qu'elle est identique avec celle donnée par l'égalité (22). Pour y arriver proposons-nous un problème plus général.

9. *On demande de résoudre le système suivant de $m+1$ équations à $m+1$ inconnues :*

$$(24)\quad \begin{cases} C_0 = x_0 + A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_m x_m, \\ C_1 = \ldots\ldots x_1 + A_1 x_2 + \ldots + A_{m-1} x_m, \\ C_2 = \ldots\ldots\ldots x_2 + \ldots + A_{m-2} x_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{m-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots x_{m-1} + A_1 x_m, \\ C_m = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_m. \end{cases}$$

De ce système, on déduit le système équivalent

$$(25)\quad \begin{cases} x_0 = \lambda_0 C_0 + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \ldots + \lambda_m C_m, \\ x_1 = \ldots\ldots \lambda_0 C_1 + \lambda_1 C_2 + \ldots + \lambda_{m-1} C_m, \\ x_2 = \ldots\ldots\ldots \lambda_0 C_2 + \ldots + \lambda_{m-2} C_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots \lambda_0 C_{m-1} + \lambda_1 C_m, \\ x_m = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \lambda_0 C_m. \end{cases}$$

La première de ces équations n'a pas besoin d'être établie; la seconde peut l'être ainsi. On peut considérer x_1 comme l'une des inconnues du système de m équations obtenues en supprimant la première du système (24). Or ce nouveau système peut encore se déduire de l'ancien en permutant circulairement les indices $0, 1, 2, \ldots m$, dans les lettres C et x, et remplaçant C_0 par 0. Or cette permutation, effectuée dans la formule qui donne x_0, fournit l'équation cherchée.

On établit de la même manière les autres relations.

Il s'agit maintenant de donner un moyen simple de calculer $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_m$. Les expressions de ces quantités en fonction de $A_1, A_2, \ldots A_m$ sont compliquées. Mais nous allons prouver qu'elles sont égales aux coefficients $1, B_0, B_1, \ldots B_m$ de $\psi(z)$.

En effet, de l'équation (19) nous tirons

$$(26) \qquad 1 - R_{q+1} = \varphi(z) . \psi(z).$$

En égalant à zéro les coefficients des mêmes puissances de x, prises dans les deux membres, nous aurons

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = B_m + A_1 B_{m-1} + A_2 B_{m-2} + \ldots + A_m . 1, \\ 0 = \ldots\ldots B_{m-1} + A_1 B_{m-2} + \ldots + A_{m-1} . 1, \\ 0 = \ldots\ldots\ldots\ldots B_{m-2} + \ldots + A_{m-2} . 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots B_1 + A_1 . 1, \\ 1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1. \end{array} \right.$$

Si nous comparons ce système au système (24) et que nous appliquions les formules (25), nous trouvons immédiatement, en regardant $B_m, B_{m-1}, \ldots B_1$, 1 comme les inconnues,

$$\left\{ \begin{array}{l} B_m = \lambda_m, \\ B_{m-1} = \lambda_{m-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_1 = \lambda_1, \\ 1 = \lambda_0. \end{array} \right.$$

Donc, etc.

Ayant résolu ainsi le système (24), on résout facilement le système (23) qui n'en est qu'un cas particulier, et l'on trouve l'égalité (21) que l'on cherchait à établir.

10. Théorème VI. — *Réciproquement, si* $F(x)$ *est donné, et que* $f(x)$ *soit défini par l'égalité* (22), $F(x)$ *satisfait à l'égalité* (21).

C'est là une conséquence du théorème précédent, car on a vu (n° 6) que $1, A_1, A_2, \ldots$, sont les coefficients du développement de $\frac{1}{\psi(z)}$.

11. Ceci posé, il devient facile de montrer que le théorème IV est une conséquence du théorème III. Formons l'égalité (21). Par hypothèse, $F(x)$ a *au moins* autant de racines réelles que $f(x)$. Donc, inversement, $f(x)$ en a *au plus* autant que $F(x)$. Mais, d'après l'égalité (22), $f(x)$ est précisément égal à l'expression qui fait l'objet du théorème IV. Donc, etc.

On démontre de la même manière le théorème IV au moyen du théorème III.

12. Les calculs précédents donnent lieu à quelques remarques que nous indiquerons rapidement.

Remarque I. — Les équations (27) nous donnent sous une forme très-symétrique les relations qui existent entre les coefficients d'un polynôme $\varphi(x)$ et ceux du quotient $\frac{1}{\varphi(x)}$ développé suivant les puissances ascendantes de x.

Remarque II. — Tout polynôme

$$\varphi(x) = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_m x^m$$

peut être mis sous forme de déterminant de la manière suivante :

$$(28)\qquad \varphi(x) = \begin{vmatrix} 1 & B_1 & B_2 & B_3 \ldots & B_m \\ x & 1 & B_1 & B_2 \ldots & B_{m-1} \\ x^2 & 0 & 1 & B_1 \ldots & B_{m-2} \\ x^3 & 0 & 0 & 1 \ldots & B_{m-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x^{m-1} & 0 & 0 & 0 \ldots & B_1 \\ x^m & 0 & 0 & 0 \ldots & 1 \end{vmatrix},$$

$1, B_1, B_2, \ldots$ étant les coefficients du quotient $\dfrac{1}{\varphi(x)}$.

En effet, remplaçons les A par des B dans les équations (24), et posons

$$C_0 = 1,$$
$$C_1 = x,$$
$$C_2 = x^2,$$
$$\ldots\ldots,$$

les formules (25) nous donneront

$$x_0 = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots = \varphi(x).$$

Or, si nous étudions directement le système non résolu, nous voyons que le dénominateur de x_0, c'est-à-dire le déterminant du système, est égal à l'unité; donc x_0 est égal simplement à son numérateur. C'est un déterminant qu'on déduit du précédent par une règle connue. On trouve ainsi l'écriture (28).

Remarque III. — Le dernier calcul du n° 5 nous montre les relations qui existent entre les racines d'une équation algébrique quelconque $\varphi(x) = 0$, et les coefficients de $\psi(x) = \dfrac{1}{\varphi(x)}$. Si on appelle $a, b, c, \ldots$ ces racines, on a

$$B_1 = \sum \frac{1}{a},$$

$$B_2 = \sum \frac{1}{a^2} + \sum \frac{1}{ab},$$

$$B_3 = \sum \frac{1}{a^3} + \sum \frac{1}{a^2 b} + \sum \frac{1}{abc},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si l'on suppose $\psi(x)$ arrêté au degré m, et qu'on appelle a', b', c',... ses racines, on a, à cause de la réciprocité qui existe entre $\varphi(x)$ et $\psi(x)$,

$$A_1 = \sum \frac{1}{a'},$$

$$A_2 = \sum \frac{1}{a'^2} + \sum \frac{1}{a'b'},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Remarque IV. — La remarque précédente nous apprend à résoudre le système suivant de m équations à m inconnues, dont la solution directe offrirait des difficultés :

$$\sum a = A_1,$$

$$\sum a^2 + \sum ab = A_2,$$

$$\sum a^3 + \sum a^2 b + \sum abc = A_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Les inconnues a, b, c,... sont les inverses des racines du polynôme obtenu en poussant jusqu'au degré m le quotient de l'unité par

$$1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots.$$