NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. MOUTIER

Sur l'équilibre des fluides

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 216-219

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__216_0>

SUR L'ÉQUILIBRE DES FLUIDES;

Par M. J. MOUTIER.

On démontre *à priori* le principe d'Archimède dans tous les Traités de Physique en considérant une portion de la masse fluide en équilibre sous l'action de son propre poids et des pressions extérieures qu'elle supporte. On peut déduire de ce principe fondamental tous les théorèmes de l'hydrostatique.

Considérons en effet un filet cylindrique incliné dont les bases ω, ω' soient dirigées obliquement par rapport aux génératrices; en appelant σ la section droite du filet, l la distance des centres de gravité des deux bases, d le poids de l'unité de volume du fluide, le poids de la masse fluide contenue dans l'intérieur du filet a pour expression $Q = \sigma l d$.

Il y a équilibre entre le poids Q du filet et les pressions extérieures qui s'exercent normalement sur les divers éléments de sa surface; chacune de ces forces peut se décomposer suivant deux directions, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire aux génératrices du filet. Le poids Q du filet et les pressions p, p' que supportent les deux bases du filet sont les seules forces qui fournissent des composantes suivant la première direction; si on appelle α, α', β les angles aigus que forment les trois forces p, p', Q avec les génératrices, les trois composantes $p\cos\alpha$, $p'\cos\alpha'$, $Q\cos\beta$ doivent se faire mutuellement équilibre; en tenant compte du sens dans lequel ces forces agissent,

$$p'\cos\alpha' = p\cos\alpha + Q\cos\beta.$$

D'ailleurs, si l'on tient compte des relations

$$Q = \sigma l d, \quad \sigma = \omega \cos\alpha = \omega' \cos\alpha',$$

$$\frac{p'}{\omega'} = \frac{p}{\omega} + l \cos 6 . d.$$

Si l'on représente par z la différence de niveau des centres de gravité des deux bases ω, ω', $l \cos 6 = z$,

$$\frac{p'}{\omega'} = \frac{p}{\omega} + zd.$$

Cette relation s'applique à deux points quelconques pris dans l'intérieur de la masse fluide, même lorsque la ligne droite qui joint les deux points n'est pas entièrement contenue à l'intérieur du fluide. Il suffit d'imaginer dans ce cas un contour brisé allant d'un point à l'autre dans l'intérieur du fluide, et d'appliquer successivement la même relation aux sommets consécutifs du contour.

On déduit de cette relation les propositions fondamentales de l'hydrostatique :

1° *La pression en un point est indépendante de l'orientation de l'élément.*

2° *La pression en un point est égale à la pression en un autre point du liquide augmentée du poids d'une colonne liquide ayant pour base l'unité de surface et pour hauteur la différence de niveau des deux points*; c'est là le principe de la transmission des pressions.

3° *La pression est la même en tous les points d'un même plan horizontal.*

La relation précédente s'étend aisément au cas de parois planes d'étendue finie. Soient en effet p la pression supportée par un élément ω d'une paroi plane d'étendue S, z la distance de cet élément à un plan horizontal arbitraire mené à l'intérieur du fluide, ϖ la pression en un point de ce plan, Z la distance du centre de gravité de la paroi S à ce plan :

$$\frac{p}{\omega} = \varpi + zd,$$

$$p = \varpi\omega + \omega z d.$$

La pression P supportée par la paroi est la somme des pressions p,

$$\mathrm{P} = \varpi \mathrm{S} + d\Sigma\omega z = \varpi \mathrm{S} + \mathrm{SZ}d;$$

par suite,

$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{S}} = \varpi + d\mathrm{Z}.$$

Pour une autre paroi plane, on a de même

$$\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{S}'} = \varpi + d\mathrm{Z}',$$

donc

$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{S}} = \frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{S}'} + d(\mathrm{Z} - \mathrm{Z}').$$

Des raisonnements analogues s'appliquent à l'équilibre des liquides soumis à des forces autres que la pesanteur, pourvu toutefois que ces forces varient d'une manière continue en passant d'un point à un point voisin. On établit sans difficulté que la pression en un point est indépendante de l'orientation de l'élément, et si on appelle *surface de niveau* le lieu géométrique des points où la pression est la même, on arrive à cette conséquence que la surface de niveau doit être normale en chacun de ces points à la résultante des forces qui sollicitent le fluide.

Il suffit de considérer un point de la surface de niveau comme le centre d'un parallélipipède rectangle infiniment petit dont les arêtes soient parallèles à la normale à la surface qui passe par le point considéré. La masse fluide contenue dans ce parallélipipède élémentaire est en équilibre sous l'action des pressions extérieures et de la résultante R des forces qui sollicitent le liquide; cette dernière force est appliquée au centre de gravité de la masse fluide. D'après les propriétés de la surface de niveau, les pressions qui s'exercent sur les faces latérales du parallélipipède élémentaire sont égales deux à deux et directement opposées et se font mutuellement équilibre. Il doit donc y avoir équilibre entre la force R et les pressions supportées par les bases du parallélipipède; ces deux dernières forces étant normales à la surface de niveau, la force R doit être également normale à cette surface.