Nouvelles annales de mathématiques

H. Durrande

Note sur les surfaces gauches du second degré (suite et fin, voir page 168)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 207-215

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__207_0>

NOTE SUR LES SURFACES GAUCHES DU SECOND DEGRÉ

(suite et fin, voir page 168);

PAR M. H. DURRANDE,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Nîmes.

CYLINDRES DU SECOND DEGRÉ.

7. THÉORÈME I. — *Lorsque les axes* A *et* B *de deux faisceaux homographiques sont parallèles, la surface résultante est un cylindre du second degré.*

On pourra représenter le cylindre par la notation [A, A′], pour indiquer par l'identité des lettres l'identité des directions des axes.

THÉORÈME II. — *Tout plan qui divise homographiquement deux droites données et qui reste parallèle à une droite fixe enveloppe un cylindre du second degré dont les génératrices sont parallèles à la droite, et qui est tangent aux deux plans menés par les deux premières droites parallèlement à la direction fixe.*

HYPERBOLOÏDE A UNE NAPPE.

8. J'appelle hyperboloïde à une nappe une surface réglée du second degré à centre unique, dont les sections planes peuvent être une quelconque des courbes du second degré, mais dont les génératrices rectilignes ne passent pas par un même point.

THÉORÈME I. — *La surface résultant du système de faisceaux homographiques* [A, B], *dont les axes ne se rencontrent pas, est un hyperboloïde à une nappe.*

Nous savons déjà que la surface est du second degré, que toutes les sections par des plans parallèles sont des coniques homothétiques. De plus, il est facile de voir que l'on peut obtenir les trois genres de coniques par des sections planes; car si, par un point quelconque de l'espace, on construit le système homothétique [A_0, B_0], le même plan sécant donne des courbes homothétiques dans les deux surfaces (th. III du n° 3); car le cône [A_0, B_0] admet les trois genres de sections planes; donc il en est de même de la surface [A, B].

Reste à prouver que c'est une surface à centre; on le fait simplement de la manière suivante :

Par l'axe A menons un plan parallèle à l'axe B, et par celui-ci le plan homologue du premier; ces deux plans se coupent suivant une droite B_1 parallèle à B et rencontrant A; répétons la même construction en échangeant les lettres A et B. Soit I le point de rencontre des droites A_1, B_1, et I' celui de B et A_1; si nous coupons la surface [A, B] par deux plans parallèles entre eux et à la droite II', et menés à égale distance de cette droite, on voit aisément que les deux coniques ainsi déterminées seront égales, mais inversement placées par rapport au point O, milieu de II' : ces deux coniques, que l'on sait être homothétiques, sont en effet circonscrites à deux parallélogrammes égaux, mais inverses par rapport au point O. Les sommets de ces parallélogrammes sont les rencontres des droites A, A_1, B, B_1 avec les deux plans parallèles.

Le point O est donc bien évidemment le centre de la surface.

THÉORÈME II. — *La surface* [A, B] *admet les mêmes plans diamétraux et diamètres conjugués que le cône homothétique* [A_0, B_0] *ayant son sommet au centre.*

Ceci résulte évidemment de ce que tout plan sécant mené par le centre commun des deux surfaces donne des courbes homothétiques et concentriques. Par conséquent, les deux surfaces ont les mêmes plans principaux ; or les plans principaux du cône donnent pour sections principales un point et deux systèmes de droites ; donc, dans l'hyperboloïde [A, B], nous aurons une ellipse connue sous le nom d'*ellipse de gorge* et deux hyperboles.

De là plusieurs modes bien connus de génération de la surface.

THÉORÈME III. — *Le cône* $[A_0, B_0]$ *homothétique et concentrique à la surface* [A, B] *est asymptote à cette surface.*

En effet, tout plan mené par l'axe commun perpendiculaire à l'ellipse de gorge coupe le cône suivant un système de deux droites qui sont les asymptotes de l'hyperbole que ce plan détermine dans la surface [A, B].

THÉORÈME IV. — *Toute section diamétrale de la surface* [A, B] *est l'enveloppe des projections des génératrices rectilignes, la projection se faisant parallèlement à la direction conjuguée.*

C'est une conséquence de ce que les sections parallèles sont des courbes homothétiques et ont leurs centres sur le diamètre conjugué. Si l'on considère en effet une section diamétrale et deux sections parallèles et équidistantes de la première, et que l'on projette les courbes obtenues sur le plan de l'une d'elles parallèlement à la ligne des centres, les projections se réduisent à deux coniques concentriques et homothétiques. La portion d'une génératrice quelconque, comprise entre les deux sections égales, se projette suivant une corde de leur projection commune ; et comme son milieu doit se trouver sur la section diamétrale, la projection de la génératrice sera donc tangente à cette section.

Remarque. — Cette démonstration repose sur un théorème bien connu des coniques homothétiques et concentriques, et qui s'étend facilement aux surfaces du second degré; ainsi : *Si deux coniques sont homothétiques et concentriques, toute corde de l'une tangente à l'autre est divisée en deux parties égales au point de contact, et réciproquement.*

Si deux surfaces du second degré sont homothétiques et concentriques, toute section faite dans l'une tangentiellement à l'autre a son centre au point de contact.

Cela vient de ce que les deux coniques ou les deux surfaces ont les mêmes systèmes de diamètres conjugués.

Corollaire I. — Les sections principales de la surface [A, B] sont les enveloppes des projections orthogonales des génératrices sur les plans principaux, et par conséquent les contours apparents de la surface.

Corollaire II. — Les plans tangents à la surface, parallèles à une droite donnée, forment un cylindre circonscrit dont la courbe de contact est la section diamétrale conjuguée de la droite.

9. On donne en Géométrie descriptive plusieurs définitions de l'hyperboloïde à une nappe; nous allons voir que toutes ces définitions sont identiques.

THÉORÈME V. — *Étant données trois droites* A, B, C *non situées dans un même plan, une droite mobile qui s'appuie constamment sur ces droites fixes décrit une surface* [A, B].

En effet, pour construire une génératrice de la surface, il suffit de prendre un point quelconque sur la droite C et de faire passer un plan par ce point et chacune des droites A, B; l'intersection de ces deux plans est une génératrice. Or, il est bien évident que les deux faisceaux de plans ainsi déterminés sont homographiques.

Remarque. — Si, au lieu de prendre les droites A et B comme axes des faisceaux, on prend A et C ou B et C, les surfaces résultantes sont identiques, ce qui tient précisément à ce qu'une génératrice détermine des divisions homographiques sur A, B, C.

THÉORÈME VI. — *L'hyperboloïde admet deux modes de génération rectiligne, c'est-à-dire que toute droite mobile s'appuyant sur trois quelconques des génératrices décrit la même surface.*

Il suffit de démontrer que toute droite qui rencontre trois génératrices G, G′, G″ de la surface [A, B] les rencontre toutes, et par conséquent est entièrement située sur la surface. Soit H une droite satisfaisant à cette condition; les deux faisceaux [A, B] doivent déterminer sur cette droite deux divisions homographiques; mais comme ces deux divisions ont déjà trois points doubles (H, G), (H, G′), (H, G″), elles coïncident, ce qui revient à dire que tous les couples de plans homologues doivent se couper sur la droite H, ou bien que la droite H rencontre toutes les génératrices de la surface [A, B].

Ainsi se trouve démontrée aussi simplement que possible, je crois, l'existence des deux systèmes de génératrices de la surface [A, B]; cette démonstration prouve d'ailleurs que toute génératrice du système H rencontre une génératrice du système G, et réciproquement.

Corollaire. — Deux génératrices d'un même système ne se rencontrent jamais, car sans cela toutes celles de l'autre système seraient dans un même plan, et en particulier les trois directrices A, B, C, ce qui est contre l'hypothèse.

THÉORÈME VII. — *Sur trois génératrices de la surface appartenant à un même système, on peut construire un parallélipipède dont le centre est le centre même de la surface, dont les trois arêtes opposées sont trois génératrices parallèles du second système.*

Ceci est démontré partout.

THÉORÈME VIII. — *Dans le parallélipipède construit sur trois génératrices, il n'y a que six arêtes formant un hexagone gauche qui appartiennent à l'hyperboloïde; la diagonale du parallélipipède qui ne rencontre aucune de ces six arêtes est le diamètre conjugué de la section diamétrale qui passe par les milieux des six arêtes génératrices.*

On verra sans difficulté que les six plans tangents à l'hyperboloïde, menés par les milieux des six arêtes, sont parallèles à la diagonale du parallélipipède qui ne rencontre pas ces six droites; cette diagonale est donc bien le diamètre conjugué de la section diamétrale qui passe par les points de contact.

Corollaire I. — L'hexagone gauche formé par les six arêtes génératrices du parallélipipède se projette suivant un hexagone circonscrit à la conique diamétrale, la projection étant faite parallèlement à la diagonale diamètre conjugué.

Corollaire II. — Si le parallélipipède est un cube, le plan diamétral passant par les milieux des six arêtes génératrices devient un plan principal, puisqu'il est perpendiculaire à la diagonale conjuguée; de plus, la projection de l'hexagone gauche devient un hexagone régulier; donc la conique principale est un cercle et l'hyperboloïde est de révolution.

THÉORÈME IX. — *Étant données deux droites* A. B, *non situées dans un même plan, et une conique fixe rencontrant ces deux droites, une droite mobile rencontrant ces trois directrices décrit un hyperboloïde* [A, B].

Il est évident, en effet, que les deux faisceaux [A, B] sont bien homographiques, puisque le plan de la conique directrice détermine, en les coupant, deux faisceaux rectilignes homographiques.

A ce théorème se rattache évidemment cet énoncé de M. Chasles :

Si, par deux droites fixes A, B, *on mène deux séries de plans perpendiculaires entre eux respectivement, le lieu des intersections des plans homologues est un hyperboloïde à une nappe dont les plans cycliques sont perpendiculaires aux deux droites.* (Question analogue à celle du cône, nº 6.)

Voici encore quelques questions qui se ramènent aisément aux précédentes :

1º *Étant données deux ellipses homothétiques et situées dans des plans parallèles, on prend un diamètre quelconque dans la petite et une corde égale et parallèle dans la grande; les droites qui joignent les extrémités de ces deux parallèles décrivent un hyperboloïde à une nappe.*

2º *Étant données trois ellipses homothétiques dans trois plans parallèles, les centres étant en ligne droite, et celui de la plus petite étant le centre d'homothétie inverse des deux autres, toute droite mobile, s'appuyant sur ces trois courbes, décrit un hyperboloïde à une nappe.*

3º *Le lieu des points dont les distances à deux droites fixes non situées dans un même plan sont dans un rapport constant est un hyperboloïde à une nappe.*

La solution de cette question se ramène au théorème de M. Chasles énoncé précédemment; on en trouvera une solution dans un Mémoire de ce savant (*Journal de Mathématiques*, t. Ier, 1836, p. 324).

PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE.

10. Théorème I. — *Si, dans le système* [A, B] *de deux faisceaux homographiques, l'un des axes s'éloigne à l'infini, c'est-à-dire si tous les plans de l'un des faisceaux deviennent parallèles, la surface du second degré est dépourvue de centre et n'admet pour sections que des courbes à branches infinies.*

Ce théorème est évident, et on voit que la nouvelle surface que l'on nomme *paraboloïde hyperbolique* à cause de la nature de ses sections planes, et que nous pourrons représenter par [A, B_∞], est la limite vers laquelle tend un hyperboloïde [A, B] lorsque son centre s'éloigne indéfiniment.

Le cône asymptote de l'hyperboloïde se transforme, dans le cas du paraboloïde hyperbolique, en un système de deux plans.

De même que pour l'hyperboloïde à une nappe, les diverses définitions du paraboloïde sont les différentes manières de faire correspondre les plans homologues des deux faisceaux. Le mode le plus ordinaire consiste à faire passer par les mêmes points d'une droite C les plans homologues du système [A, B_∞], ce qui revient à dire que la surface est engendrée par une droite mobile s'appuyant sur deux droites fixes A, C, en restant parallèle à un plan fixe nommé *plan directeur*.

Comme pour l'hyperboloïde, nous avons encore un double mode de génération, car une droite rencontrant trois génératrices les rencontre toutes, et par conséquent est entièrement sur la surface. Il est d'ailleurs facile de s'assurer que ces nouvelles génératrices sont elles-mêmes parallèles à un second plan directeur parallèle aux droites A, C.

La surface homothétique remplaçant le cône asymptote est, comme nous l'avons dit, un système de deux plans; ces plans sont parallèles aux plans directeurs. Les sections planes de ce système sont des courbes du même genre que les sections planes de la surface par les mêmes plans sécants.

Voici quelques questions sur le paraboloïde hyperbolique :

1° *Une droite mobile, s'appuyant sur trois droites parallèles à un même plan, décrit un paraboloïde. Double mode de génération.*

2° *Le lieu des points équidistants de deux droites fixes non situées dans un même plan est un paraboloïde hyperbolique. Si les droites se rencontrent, c'est un système de deux plans, surface du même genre que le paraboloïde.*

3° *Le lieu des normales à une surface gauche quelconque en tous les points d'une même génératrice est un paraboloïde hyperbolique.*

Je ferai remarquer, à l'occasion de cette dernière question, que le raccordement de deux surfaces réglées qui ont une génératrice commune se rattache à l'homographie; il était aisé de voir que les points de contact des plans tangents qui coïncident forment deux divisions homographiques sur l'arête commune. Il en résulte que, lorsque les deux divisions ont trois points doubles, c'est-à-dire lorsque les deux surfaces ont trois plans tangents communs sur une même génératrice, elles se raccordent complétement tout le long de cette génératrice.