ZEUTHEN

Note sur les degrés de multiplicité des solutions indiquées par le principe de correspondance, suivie d'une application de ce principe à une démonstration des relations plückériennes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 200-206

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__200_1>

NOTE

Sur les degrés de multiplicité des solutions indiquées par le principe de correspondance, suivie d'une application de ce principe à une démonstration des relations plückériennes ;

Par M. ZEUTHEN.

Le principe de correspondance, dû à M. Chasles, s'énonce ainsi (voir *Nouvelles Annales*, 2e série, t. V, p. 195) :

« Lorsqu'on a sur une droite L deux séries de points

x et u tels, qu'à un point x correspondent α points u, et à un point u, β points x, le nombre des points x qui coïncident avec des points correspondants u est $\alpha+\beta$ (*).

» En effet, représentons par les lettres x et u les distances des points des deux séries à une origine fixe prise sur L. On a entre ces distances une relation telle que

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} x^{\beta}(Au^{\alpha}+Bu^{\alpha-1}+\ldots) \\ \quad +x^{\beta-1}(A'u^{\alpha}+B'u^{\alpha-1}+\ldots)+\ldots=0; \end{array}\right.$$

et les points x qui coïncident avec des points correspondants u sont donnés par l'équation

$$(2)\qquad Ax^{\alpha+\beta}+(B+A')x^{\alpha+\beta-1}+\ldots=0\ldots \text{»}$$

Une seule difficulté s'élève souvent dans l'application de ce principe, celle de trouver combien de fois un point où l'on sait qu'un point x coïncide avec un ou plusieurs points correspondants u est compté dans le nombre $\alpha+\beta$. C'est d'un moyen qui peut servir à résoudre cette difficulté que je parlerai ici.

Si l'on prend les distances x et u pour abscisses et ordonnées dans un système de coordonnées, l'équation (1) représentera une courbe dont les points d'intersection avec la droite $x=u$ ont pour valeurs communes des deux coordonnées les distances des points cherchés sur L à l'origine prise sur cette droite. Si l'on sait qu'en un point p de L un point x coïncide avec un ou plusieurs points correspondants u, la distance de p à l'origine prise sur L sera donc égale aux deux coordonnées d'un

(*) Nous ne nous occuperons pas ici à part du théorème analogue sur les droites d'un faisceau; car les propriétés qui y sont relatives sont des conséquences immédiates de celles des points d'une droite.

point q qui, dans la représentation graphique, est commun à la courbe (1) et à la droite $x = u$, et le nombre de coïncidences de points correspondants qui ont lieu au point p est égal à celui des points communs à la courbe (1) et à la droite $x = u$ qui coïncident en q. Ce dernier nombre dépend : 1° de celui des branches de la courbe (1) qui passent par q; et 2° du nombre et des ordres des contacts qu'elle y a avec la droite $x = u$.

1° Soit γ le nombre des points u correspondants à un point x qui coïncident avec lui s'il est au point p, et δ celui des points x correspondants à un point u qui coïncident avec lui s'il est au point p, et supposons que $\gamma \geqq \delta$. Alors le point q de la courbe (1) sera multiple de l'ordre δ, à moins qu'une droite menée par q parallèlement à l'axe des x ne touche en ce point une branche de la courbe, c'est-à-dire à moins qu'un point u qui correspond à un point x infiniment peu éloigné de p ne soit à une distance de p qui est infiniment petite d'un ordre supérieur. Dans ce cas exceptionnel, on trouve l'ordre du contact par une comparaison des ordres des infiniment petites distances de p à deux points x et u qui se correspondent, et l'on aura de cette manière le nombre qu'il faut soustraire de δ. On doit obtenir le même résultat en faisant une semblable soustraction de γ.

2° Si une branche de la courbe (1) a au point q un contact avec la droite $x = u$, la valeur de $x - u$ qui correspond à un point de cette branche infiniment peu éloigné de q sera infiniment petite d'un ordre supérieur. Dans ce cas, un des points u qui correspondent à un point x infiniment peu éloigné de p doit être infiniment plus près de x que de p. Si cela a lieu, une comparaison exacte des ordres de ces quantités infiniment petites servira à déterminer l'ordre du contact.

Le procédé que nous venons d'exposer permet, au moins en beaucoup de cas, de trouver les degrés de multiplicité des coniques exceptionnelles qui appartiennent à un système de coniques. Il fournit donc directement les coefficients que j'ai trouvés d'une manière très-différente dans un Mémoire sur la détermination des caractéristiques des systèmes de coniques qui a été inséré dans plusieurs numéros des *Nouvelles Annales* pendant la dernière moitié de l'année passée. Au lieu de nous occuper de nouveau des systèmes de coniques, nous donnerons d'autres exemples du procédé exposé, en employant le principe de correspondance à une démonstration des formules de M. *Plücker*.

Les équations *plückériennes*, dont il y a trois indépendantes l'une de l'autre, ont lieu entre les six nombres suivants : l'ordre m d'une courbe algébrique quelconque ou le nombre de ses intersections, réelles ou imaginaires, avec une droite; sa classe n ou le nombre des tangentes qu'on y peut mener par un point; les nombres d de ses points doubles, d' de ses points de rebroussement, t de ses tangentes doubles et t' de ses tangentes d'inflexion. On peut donner à ces équations les formes suivantes :

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} m(m-1) &= n+2d+3d',\\ n(n-1) &= m+2t+3t',\\ 3(m-n) &= d'-t'.\end{aligned}\right.$$

Commençons par démontrer la *deuxième*. Prenons, à cet effet, deux droites fixes L et M dans le plan de la courbe; menons par un point x de L une tangente à la courbe, et soit z le point où celle-ci rencontre M. Menons ensuite par z à la courbe une tangente différente de la première, et soit u le point où celle-ci rencontre L. Alors à un point x correspondent n points z et à chacun de ceux-ci $(n-1)$ points u, par conséquent à un point x, $n(n-1)$ points u. De même, un point u déterminant des points correspondants x exactement de la même manière que si on l'avait pris pour un point x, ce qui fait l'équation (1) symétrique dans cet exemple, à un point u correspondent $n(n-1)$ points x. Donc

$$\alpha = \beta = n(n-1),$$

et, par conséquent, L contient $2n(n-1)$ points x qui coïncident avec des points correspondants u.

Cette coïncidence a seulement lieu aux points où la droite L rencontre : 1° la droite M ; 2° les m tangentes à la courbe donnée à ses points d'intersection avec M; 3° les t tangentes doubles; et 4° les t' tangentes d'inflexion de cette courbe. Désignons le premier de ces points par p' et respectivement par p'', p''', p^{iv} des points appartenant aux trois autres groupes.

1° Le point q', qui sur la courbe représentée par l'équation (1) correspond à p', est multiple de l'ordre $n(n-1)$, et, en général, aucune des branches de cette courbe n'est en ce point, q', tangente à la droite $x = u$. Par conséquent $n(n-1)$ des coïncidences cherchées ont lieu en p'.

2° Le point q'', qui sur la courbe (1) correspond à un des m points p'', est un point simple où la tangente, à cause de la symétrie de cette courbe par rapport à la droite $x = u$, y est perpendiculaire. Les m points p'' ne donnent donc que des solutions simples.

3° Le point q''', qui sur la courbe (1) correspond à un des t points p''', est un point double, et aucune des branches n'y touche la droite $x = u$. Par conséquent, *deux* coïncidences ont lieu en chacun des t points p'''.

4° Le point q^{iv}, qui sur la courbe (1) correspond à un des t' points p^{iv}, est un point de rebroussement ordinaire où la tangente est la droite $x = u$. Par conséquent, trois coïncidences ont lieu à chacun des t' points p^{iv}.

On trouve donc

$$2n(n-1)=n(n-1)+m+2t+3t',$$

d'où

$$n(n-1)=m+2t+3t'.$$

C. Q. F. D.

La *première* des trois équations se déduit de la deuxième par le principe de dualité (on peut aussi la démontrer d'une manière analogue).

Dans la preuve de la *troisième* des équations (3) on emploie une seule droite, fixe mais arbitraire, L, dans le plan de la courbe donnée. Par un point x de cette droite on mène une tangente à la courbe qui la coupera en $m-2$ points z.

Désignons par u le point où la tangente à la courbe à un point z rencontre L. Alors, à un point x correspondent $n(m-2)$ points z, et à chacun de ceux-ci un seul point u; par conséquent à un point x, $n(m-2)$ points u; à un point u correspondent n points z, et à un point z, $(n-2)$ points x, par conséquent à un point u, $n(n-2)$ points x. Le nombre des points x qui coïncident avec des points correspondants u est donc

$$n(m-2)+n(n-2)=n(m+n-4).$$

Cette coïncidence n'a lieu qu'aux points où la droite L rencontre : 1° la courbe donnée elle-même; 2° ses d' tangentes aux points de rebroussement; 3° ses t tangentes doubles, et 4° ses t' tangentes d'inflexion. Désignons maintenant par p', p'', p''', p^{iv} respectivement des points de ces quatre groupes.

1° Le point q', qui sur la courbe que représente maintenant l'équation (1) correspond à un des m points d'intersection p' de L avec la courbe donnée, est multiple de l'ordre $(n-2)$, et comme les tangentes à toutes les branches sont parallèles à l'axe des x, aucune de ces branches ne sera tangente à la droite $x = u$. Par conséquent $n - 2$ coïncidences de points correspondants x et u ont lieu à chacun des m points p'.

2° Le point q'', qui sur la courbe (1) correspond à un des d' points p'', n'est qu'un point simple qui a la parallèle à l'axe des x pour tangente d'inflexion. La courbe (1) y coupe donc seulement la droite $x = u$. Les d' points p'' ne donnent donc que des solutions simples.

3° Par le point q''', qui sur la courbe (1) correspond à un des t points p''', passent deux branches de cette courbe qui toutes deux y sont tangentes à une parallèle à l'axe des u, et qui par conséquent toutes deux coupent la droite $x = u$. Par conséquent, *deux* coïncidences ont lieu à chacun des points p'''.

4° Le point q^{IV}, qui sur la courbe (1) correspond à un des t' points p^{IV}, est un point de rebroussement où la tangente est parallèle à la droite $u = 4x$, de façon que la droite $u = x$ n'y aura que deux intersections avec cette courbe. Par conséquent, *deux* coïncidences ont lieu à chacun des t' points p^{IV}.

On a donc

$$n(m + n - 4) = m(n - 2) + d' + 2t + 2t'.$$

En éliminant t au moyen de la deuxième équation (3) on trouve la troisième.