J. STEINER

Problèmes et théorèmes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 193-200
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__193_0>

PROBLÈMES ET THÉORÈMES (*);

PAR M. J. STEINER.

1. *Étant demandée une section conique passant par trois points donnés, et ayant en un point quelconque d'une courbe donnée du degré n un contact du deuxième ordre avec elle, le nombre des solutions du problème sera en général*

$$3n(n-1).$$

Si les trois points donnés se trouvent en particulier sur la courbe elle-même, le nombre des solutions sera diminué de deux pour chacun de ces points, de sorte que si les trois points se trouvent à la fois sur la courbe, le nombre des solutions sera

$$3n(n-1)-6=3(n+1)(n-2).$$

2. *Quel est le nombre des sections coniques ayant un contact du deuxième ordre avec une courbe donnée du degré n en un quelconque de ses points, et en outre :*

1° *Passant par deux points donnés et touchant une droite donnée;*

2° *Passant par un point donné et touchant deux droites données;*

3° *Ayant trois droites données pour tangentes?*

3. *Étant demandée une section conique passant par*

(*) Ces questions, auxquelles de récents travaux aussi bien que le nom de leur auteur donnent de l'intérêt, se trouvaient à la suite d'un Mémoire inséré par extrait dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XXXVII, p. 156. Nous publierons ce Mémoire prochainement. P.

trois points donnés, et touchant en deux points quelconques une courbe donnée du degré n, le nombre des solutions du problème sera en général

$$\frac{1}{2}(n-1)n(n+1)(n+2) - 4(n-1)n$$
$$= \frac{1}{2}(n^4 + 2n^3 - 9n^2 + 6n).$$

Si un, deux ou trois des points donnés, que nous appellerons a, b, c, se trouvent sur la courbe, le nombre des solutions diminuera par degrés; or, il y aura quelques-unes de ces sections coniques qui seront en contact avec la courbe aux points donnés mêmes, et, chaque fois que cela a lieu, deux des sections coniques coïncident en une seule. Si, par exemple, le premier point a se trouve sur la courbe, celle-ci sera en contact par le point a avec $n^2 + n - 4$ des sections coniques, de sorte que le nombre des solutions sera diminué pareillement de $n + n - 4$. Et si l'on ne compte que celles des sections coniques qui ne sont pas en contact en a, leur nombre sera diminué de

$$2(n^2 + n - 4)$$

Si le second point b se trouve aussi sur la courbe, le nombre des sections coniques, qui ne sont en contact ni par a ni par b, sera diminué encore de

$$2(n^2 + n - 6);$$

et enfin, si le troisième point c se trouve aussi sur la courbe, le nombre des sections coniques n'étant en contact ni par a, ni par b, ni par c, diminuera encore de

$$2(n + n - 8),$$

de sorte que le nombre restant de ces sections coniques ne sera que

$$\frac{1}{2}(n^4 + 2n^3 - 21n^2 - 6n + 72)$$

$$= \frac{1}{2}(n-3)(n-2)(n+3)(n+4) - 2(n-3)n,$$

attendu que le nombre à retrancher était en total

$$6(n^2 + n - 6).$$

Le nombre des autres sections coniques se réduit à $n^2 + n - 8$ qui sont en contact par un des points a, b ou c, plus 3 qui sont en contact par a et b, par a et c ou par b et c; en comptant chacune des premières deux fois et chacune des dernières quatre fois, nous aurons le nombre juste

$$3(n^2 + n - 8) \times 2 + 3 \times 4 = 6(n^2 + n - 6).$$

Mais, en ne comptant qu'une seule fois chacune de ces sections coniques en contact par les points a, b, c, ce qui donne le nombre $3(n^2 + n - 7)$, le nombre de toutes les sections coniques ne sera que

$$\frac{1}{2}(n^4 + 2n^3 - 15n^2 + 30) = \frac{1}{2}nn(n-3)(n+5) + 15,$$

et alors

$$3(n^2 + n - 5)$$

sections coniques peuvent être regardées comme ayant disparu.

On remarquera que cette proposition contient entre autres celle-ci : *Par trois points donnés passent en général quatre sections coniques doublement tangentes à une section conique donnée* (*ou bien touchant deux droites données*), qui a été démontrée par M. Poncelet.

4. Les propositions suivantes sont une conséquence des développements donnés au n° 3.

I. *Étant demandée une section conique ayant un contact du deuxième ordre avec une courbe donnée du degré n en un point a donné sur elle, et étant en outre en contact avec elle par deux autres points quelconques, le nombre des solutions du problème sera en général*

$$\frac{1}{2}(n^4 + 2n^3 - 21n^2 - 6n + 72).$$

II. *Étant demandée une section conique ayant, avec la courbe donnée, un contact du troisième ordre en un de ses points donnés a, et étant encore en contact avec elle par un autre point quelconque, le nombre des solutions sera en général*

$$n(n+1) - 8.$$

5. Pareillement, la proposition spéciale suivante est un corollaire de celle donnée au n° 1.

Étant demandée une section conique ayant deux contacts du deuxième ordre avec une courbe donnée du degré n, le premier en un point donné a et le second en un point quelconque, le nombre des solutions sera

$$3n(n-1) - 9.$$

6. *Quel est le nombre des sections coniques étant en contact par deux points avec une courbe donnée n, et en outre :*

1° *Passant par deux points donnés et touchant une droite donnée,* ou bien

2° *Passant par un point donné et touchant deux droites données,* ou bien

3° *Touchant trois droites données?*

7. Par rapport aux propositions données aux nos 1 et 3, nous remarquerons encore les cas spéciaux suivants :

I. *Une courbe donnée du degré* $2n$ *ayant trois points n tuples* (*), *mais aucun autre point multiple outre ces trois-là, si l'on demande une section conique passant par ces trois points, et ayant en outre avec la courbe :*

1° *Un point quelconque de contact du deuxième ordre, le nombre des solutions est* $3n(n-2)$, ou bien

2° *Deux autres points de contact quelconques, le nombre des solutions est* $\frac{1}{2}n(n-2)(n-3)(n+3)$.

II. *Une courbe donnée du degré* $2n$ *ayant deux points n tuples et un point* $(n-1)$ *tuple, mais aucun autre point multiple outre ceux-là, si l'on demande une section conique passant par ces points, et ayant en outre avec la courbe :*

1° *Un point quelconque de contact du deuxième ordre, le nombre des solutions est* $3(n+1)(n-1)$, ou bien

2° *Deux autres points de contact quelconques, le nombre des solutions est* $\frac{1}{2}(n+1)(n-1)(n-2)(n+4)$.

III. *Une courbe donnée du degré* $(2n-1)$ *ayant trois points* $(n-1)$ *tuples, mais aucun autre point multiple, si l'on demande une section conique par ces trois points, et ayant en outre avec la courbe :*

1° *Un point quelconque de contact du deuxième ordre, le nombre des solutions est* $3(n+1)(n-1)$, ou bien

(*) Point *n* tuple, point multiple par lequel la courbe passe *n* fois.

2° *Deux autres points de contact quelconques, le nombre des solutions est* $\frac{1}{2}(n+1)(n-1)(n-2)(n+4)$.

IV. *Une courbe donnée du degré* $(2n-1)$ *ayant un point ntuple et deux points* $(n-1)$ *tuples, mais aucun autre point multiple, si l'on demande une section conique passant par ces points, et ayant en outre avec la courbe :*

1° *Un point quelconque de contact du deuxième ordre, le nombre des solutions est* $3n(n-2)$, ou bien

2° *Deux autres points de contact quelconques, le nombre des solutions est* $\frac{1}{2}n(n-2)(n-3)(n+3)$.

8. *Deux cercles osculateurs quelconques d'une section conique étant donnés de grandeur et de position, trouver le lieu du centre de cette conique et de toutes ses semblables. Le lieu (l'enveloppe) de la droite qui passe par les deux points de contact de ces cercles avec la section conique variable est une courbe de la sixième classe.*

9. *Les polygones de plus grand périmètre inscrits à une ellipse ont le périmètre égal.* (*Voir* t. XXXVII, p. 189-191 du *Journal de M. Crelle.*) *Trouver ce périmètre, l'ellipse étant donnée.*

10. I. *Trouver parmi tous les triangles de plus grande aire inscrits à une ellipse donnée celui dont le périmètre est un maximum ou un minimum.*

II. *Trouver parmi tous les triangles de plus grand périmètre inscrits à une ellipse donnée celui dont l'aire est un maximum ou un minimum;* ou, plus généralement :

11. I. *Trouver parmi tous les polygones de plus grande*

aire inscrits à une ellipse donnée celui dont le périmètre est un maximum ou un minimum ; et

II. *Trouver parmi tous les polygones de plus grand périmètre inscrits à une ellipse donnée celui dont l'aire est un maximum ou un minimum.*

Quant au quadrilatère, la dernière question (II) a trouvé sa réponse dans mon Mémoire déjà cité (t. XXXVII, p. 184 du *Journal de Crelle,* savoir : *L'aire du quadrilatère est un maximum ou un minimum, selon que ses côtés sont parallèles aux diamètres conjugués égaux ou aux axes de l'ellipse.* Mais la réponse à la première question (I) est pareillement facile pour le quadrilatère et peut presque être énoncée par les mêmes mots, savoir :

Parmi tous les quadrilatères de plus grande aire inscrits à une ellipse, le périmètre de celui-là est un maximum $= u$ qui a les axes de l'ellipse pour diagonales (ou dont les côtés sont parallèles aux diamètres conjugués égaux), et le périmètre de celui-là est un minimum $= u_1$ qui a les diamètres conjugués égaux de l'ellipse pour diagonales (ou dont les côtés sont parallèles aux côtés de l'ellipse). En indiquant par a et b les demi-axes de l'ellipse, on a

$$u = 4\sqrt{a^2 + b^2}, \quad u_1 = 2(a + b)\sqrt{2};$$

donc

$$u^2 - u_1^2 = 8(a - b)^2.$$

12. *Si nous désignons par a et b, a_1 et b_1 les axes de deux sections coniques confocales, par exemple de deux ellipses ε_1 et ε_1^2, et si ces axes ont cette relation que*

$$\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} = 1,$$

il y aura un nombre infini de triangles à la fois inscrits à la courbe ε^2 *et circonscrits à la courbe* ε_1^2.

Et si les axes ont cette relation, que

II $$a^2 : b^2 :: b_1 : a_1,$$

il y aura un nombre infini de quadrilatères à la fois inscrits à la courbe ε^2 *et circonscrits à la courbe* ε_1^2.

13. *Quelle est la relation qui doit avoir lieu entre les axes de deux sections coniques confocales* ε^2 *et* ε_1^2, *pour qu'un polygone puisse être à la fois inscrit à l'une et circonscrit à l'autre?* Dès qu'un polygone peut être décrit de la manière demandée, on sait, d'après une belle proposition de M. Poncelet, qu'il existe une infinité de polygones jouissant de la même propriété. Tous ces polygones ont le périmètre égal, et ils ont le *plus grand périmètre* parmi tous les polygones inscrits à la courbe ε^2, et ils ont le *plus petit* périmètre parmi tous les polygones circonscrits à la courbe ε_1^2 (t. XXXVII, p. 189).

Berlin, au mois de novembre 1852.