NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 182-187

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__182_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 765

(voir 2e série, tome V, page 336);

PAR M. GAYON,
Candidat à l'École Normale.

On partage les côtés d'un carré en n parties égales; par les points de division on mène des parallèles aux côtés, de manière à partager la figure en n^2 petits carrés. Pour se rendre d'un sommet du carré donné au *sommet opposé, on peut suivre plusieurs lignes brisées différentes; pour tous ces chemins, il y en a qui sont minimums et égaux entre eux : on propose d'en trouver le nombre.* (J.-Ch. DUPAIN.)

Il est facile de constater l'existence de ces chemins minimums, et de voir qu'ils sont tous égaux à la somme de deux côtés du carré donné, c'est-à-dire à $2n$ petites divisions. De plus, tous ces chemins comprennent n divisions horizontales et n divisions verticales. Le problème revient donc à trouver le nombre des permutations avec répétition de deux sortes de lignes répétées chacune n fois. Ce nombre est donné par la formule

$$\frac{P_{2n}}{P_n . P_n} = C_{2n}^n = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n}.$$

Remarquons que ce quotient est précisément égal à la somme des carrés des coefficients du binôme, et que, comme l'indique M. Bertrand dans ses Exercices, on peut l'écrire sous la nouvelle forme

$$\frac{2.6\ 10.14\ldots(4n-2)}{1.2.3\ldots n}.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Annequin, du lycée de Grenoble; Mandagot et Daujon, du lycée Saint-Louis; Violet, de l'École de Sorrèze; Giard et Crépin, du lycée de Douai; Leclerc, du lycee de Douai; Laisant, capitaine du génie.

Question 794

(voir 2e série, t. VI, p. 94).

Cette question, qui ne consiste que dans une identité à vérifier, a été résolue par MM. Paul Laugier, Gautier, du lycée Louis-le-Grand; Sandier, du lycée de Lyon; Honoré Pi, de Sorrèze; Jourdan, du collége Chaptal; Lemoine, du lycée de Saint-Omer; Welsch, Rouhier, Driant, du

lycée de Metz; Plane, du lycée de Besançon; Perronne, du collége Stanislas. M. Paul Mansion met le premier membre de l'identité sous forme de déterminant et arrive par quelques transformations à un déterminant dont une colonne ne contient que des zéros. La place nous manque pour citer une dizaine de solutions qui nous sont parvenues depuis que ceci est imprimé.

Question 792

(voir 2e série, t. VI, p. 48);

PAR M. A. VAISON,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Vacquant).

Quand on change deux cercles en deux autres cercles au moyen de la transformation par rayons vecteurs réciproques, le rapport du carré de la tangente commune au rectangle des diamètres est le même dans la figure primitive et dans la figure transformée.

(J. CASEY.)

Si $f(x, y) = 0$ est l'équation d'une courbe, l'équation de sa transformée par rayons vecteurs réciproques, suivant une puissance k positive ou négative, l'origine étant le pôle de la transformation, est

$$f\left(\frac{kx}{x^2+y^2},\quad \frac{ky}{x^2+y^2}\right) = 0.$$

Considérons en particulier les cercles représentés par les équations suivantes :

$$(1)\qquad x^2 + y^2 - 2ax - 2by + M = 0,$$

$$(2)\qquad x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + M' = 0.$$

Le pôle de transformation étant l'origine, et ce point étant d'ailleurs situé d'une manière quelconque dans le plan des deux cercles, les transformées suivant la puissance k des courbes (1) et (2) seront deux cercles représentés par les équations suivantes :

$$(3)\qquad x^2+y^2-\frac{2ak}{M}x-\frac{2bk}{M}y+\frac{k^2}{M}=0,$$

$$(4)\qquad x^2+y^2-\frac{2a'k}{M'}x-\frac{2b'k}{M'}y+\frac{k^2}{M'}=0.$$

Cela posé, remarquons que le carré de la tangente commune à deux cercles, dont la distance des centres est d et dont les rayons sont R et R$'$, est

$$d^2-(R-R')^2 \quad \text{ou} \quad d^2-(R+R')^2,$$

suivant que l'on considère la tangente commune extérieure ou la tangente commune intérieure. Or, dans les deux cercles représentés par les équations (1) et (2),

$$d^2=(a-a')^2+(b-b')^2,$$

$$R-R'=\sqrt{a^2+b^2-M}-\sqrt{a'^2+b'^2-M'},$$

$$R+R'=\sqrt{a^2+b^2-M}+\sqrt{a'^2+b'^2-M'}.$$

Donc le rapport du carré de la tangente commune au rectangle des diamètres est, pour ces deux courbes,

$$\frac{M+M'-2aa'-2bb'+2\sqrt{(a^2+b^2-M)(a'^2+b'^2-M')}}{4\sqrt{(a^2+b^2-M)(a'^2+b'^2-M')}},$$

ou bien

$$\frac{M+M'-2aa'-2bb'-2\sqrt{(a^2+b^2-M)(a'^2+b'^2-M')}}{4\sqrt{(a^2+b^2-M)(a'^2+b'^2-M')}}.$$

Le premier convient à la tangente commune extérieure, le second à la tangente commune intérieure.

Les rapports correspondants pour les cercles représentés par les équations (3) et (4) sont respectivement

$$\frac{\dfrac{k^2}{M}+\dfrac{k^2}{M'}-2(aa'+bb')\dfrac{k^2}{MM'}+2\sqrt{\left(\dfrac{a^2k^2}{M^2}+\dfrac{b^2k^2}{M^2}-\dfrac{k^2}{M}\right)\left(\dfrac{a'^2k^2}{M'^2}+\dfrac{b'^2k^2}{M'^2}-\dfrac{k^2}{M'}\right)}}{4\sqrt{\left(\dfrac{a^2k^2}{M^2}+\dfrac{b^2k^2}{M^2}-\dfrac{k^2}{M}\right)\left(\dfrac{a'^2k^2}{M'^2}+\dfrac{b'^2k^2}{M'^2}-\dfrac{k^2}{M'}\right)}}$$

$$\frac{\dfrac{k^2}{M}+\dfrac{k^2}{M'}-2(aa'+bb')\dfrac{k^2}{MM'}-2\sqrt{\left(\dfrac{a^2k^2}{M^2}+\dfrac{b^2k^2}{M^2}-\dfrac{k^2}{M}\right)\left(\dfrac{a'^2k^2}{M'^2}+\dfrac{b'^2k^2}{M'^2}-\dfrac{k^2}{M'}\right)}}{4\sqrt{\left(\dfrac{a^2k^2}{M^2}+\dfrac{b^2k^2}{M^2}-\dfrac{k^2}{M}\right)\left(\dfrac{a'^2k^2}{M'^2}+\dfrac{b'^2k^2}{M'^2}-\dfrac{k^2}{M'}\right)}}$$

expressions qui, après réduction, sont identiques respectivement aux expressions (5) et (6). La question est donc résolue.

Note. — Autres solutions de MM. Laisant, Kœhler, capitaines du génie; Fouret, sous-lieutenant du génie; E. Pellet, élève du lycée de Nîmes; Paul Vivier, du lycée de Strasbourg; Willière, professeur à Thuin (Belgique).

Question 797

(voir 2e série, t. VI, p. 95);

Par MM. D'ANNOUX et CAFFARELLI,
Élèves en Mathématiques élémentaires.

Tout quadrilatère, dans lequel les diagonales sont entre elles comme les sommes des produits des côtés qui comprennent ces diagonales, est inscriptible.

1. Lemme I. — *Étant donné un quadrilatère* ABCD, *si l'on fait varier ses angles sans modifier les longueurs des côtés, on peut amener ce quadrilatère à être inscriptible.* (Théorème connu.)

2. Lemme II. — *Si, dans le quadrilatère variable dont nous venons de parler, une des diagonales augmente, l'autre diminue.*

En effet, quand AC augmente, les angles B et D augmentent. On le voit en considérant les triangles ACD, ACB, dont deux côtés gardent la même longueur pendant que le troisième, AC, augmente. La somme B + D des angles opposés à ce côté augmente. Donc la somme A + C diminue, puisqu'on a constamment

$$A + C + B + D = 4 \text{ droits}.$$

Donc un au moins des angles A et C diminue. Donc la diagonale BD, opposée à ce côté, diminue comme étant le troisième côté d'un triangle dont deux côtés gardent la même longueur pendant que l'angle qu'ils comprennent diminue.

3. *Démonstration du théorème.* — Soient L, L′ les diagonales du quadrilatère proposé, l et l' les diagonales du quadrilatère inscriptible qui a les mêmes côtés que le premier.

Si on applique à ce dernier quadrilatère le théorème relatif au rapport des diagonales, on trouve, pour le rapport $\frac{l}{l'}$, l'expression que l'hypothèse attribue à $\frac{L}{L'}$. On a donc

$$\frac{l}{l'} = \frac{L}{L'}. \tag{1}$$

On peut en conclure $l = L$, $l' = L'$, car si l'on avait

$$l > L, \tag{2}$$

on aurait inversement, d'après le lemme II,

$$l' < L'. \tag{3}$$

Or, le système des inégalités (2) et (3) est incompatible avec l'égalité (1). Donc....

Note. — M. Périer, élève du lycée Charlemagne, a résolu la question à peu près de la même manière.