Nouvelles annales de mathématiques

H. Durrande

Note sur les surfaces gauches du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 168-177

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__168_1>

NOTE SUR LES SURFACES GAUCHES DU SECOND DEGRÉ;

PAR M. H. DURRANDE,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Nîmes.

INTRODUCTION.

1. L'homographie a pris une place importante dans l'étude des sections coniques; aussi, presque tous les ouvrages classiques parus dans ces derniers temps en exposent les principes et en montrent les applications les plus usuelles en Géométrie plane; mais il me semble que ces notions prendraient plus d'importance encore aux yeux des élèves si on leur montrait la simplicité que l'usage de l'homographie peut apporter dans la théorie des surfaces, et principalement dans les considérations que l'on emploie en Géométrie descriptive afin d'éviter de se servir de l'analyse. Sans doute on peut trouver des applications du genre de celles que j'ai en vue dans de très-beaux Mémoires de M. Chasles, que l'on doit regarder comme un des principaux créateurs de la Géométrie moderne; mais il n'est pas souvent facile de se procurer ces Mémoires, disséminés dans divers recueils. Parmi les nombreux ouvrages de Géométrie descriptive, je citerai l'excellent Traité de M. de la Gournerie, qui démontre les propriétés des surfaces gauches du second degré par des considérations d'homographie; mais cet ouvrage n'est pas précisément un de ces Traités élémentaires qui sont entre les mains de tous les élèves, et j'ai pensé qu'il ne

serait peut-être pas inutile de résumer une théorie des surfaces réglées du second degré dans laquelle on ne ferait usage que de considérations géométriques. Cette Note n'a d'autre objet que de tracer aux élèves de Mathématiques spéciales le programme d'une leçon qu'ils développeront eux-mêmes avec la plus grande facilité.

Je suppose que le lecteur possède les principes de l'homographie plane, qu'il trouvera exposés dans plusieurs excellents ouvrages élémentaires; nous nous servirons surtout de l'existence des points doubles dans deux divisions homographiques sur la même droite, des théorèmes sur les coniques résultant des intersections de droites homologues de deux faisceaux homographiques, ou considérées comme enveloppes de droites mobiles déterminant des divisions homographiques sur deux droites fixes situées dans un même plan.

Enfin je prie le lecteur de vouloir bien tracer lui-même les figures indiquées dans les démonstrations, ce qui ne présentera aucune difficulté.

HOMOGRAPHIE DANS L'ESPACE.

2. *Définitions.* — Si, par deux droites fixes situées d'une manière quelconque dans l'espace, on fait passer deux faisceaux de plans, on dira que ces deux faisceaux sont homographiques s'ils déterminent deux divisions homographiques sur la même droite ou sur deux droites différentes.

Deux faisceaux homographiques déterminent deux divisions homographiques sur une transversale quelconque, ce qui se justifie absolument comme pour les faisceaux rectilignes, en montrant que le rapport anharmonique de quatre segments pris sur la transversale est égal au rapport anharmonique des sinus des angles dièdres formés par les plans qui divisent la droite.

On sait que lorsque deux droites sur lesquelles sont tracées deux divisions homographiques coïncident, il ne peut y avoir plus de deux points doubles, sans quoi tous les points correspondants coïncident; ceci est d'une grande importance pour ce qui va suivre.

Nous appellerons *axe* d'un faisceau de plans la droite A par laquelle passent tous les plans du faisceau, et nous désignerons par [A, B] le système de deux faisceaux homographiques de plans ayant les droites A et B pour axes; nous verrons que l'on peut encore attacher une autre signification à cette notation.

Les axes A et B d'un système sont évidemment eux-mêmes des transversales des deux faisceaux et sont par conséquent divisés homographiquement par les plans qui les composent, ce qui revient encore à dire que les droites résultant de l'intersection des plans homologues du système déterminent des divisions homographiques sur les axes.

Tout plan sécant détermine, dans un système [A, B], deux faisceaux homographiques rectilignes.

Je vais indiquer maintenant, sous forme de théorèmes, les propriétés générales d'un système [A, B] de deux faisceaux homographiques, puis j'examinerai séparément les diverses surfaces réglées qui peuvent résulter d'un pareil système suivant la position relative des axes.

3. Théorème I. — *Étant donnés deux faisceaux homographiques de plans, le lieu des droites d'intersection des plans homologues est une surface du second degré.*

(Je conviens d'appeler *surface du second degré* une surface dont toutes les sections planes sont des courbes du second degré; ou bien encore, une surface qu'une droite ne peut rencontrer en plus de deux points, à moins d'être entièrement située sur la surface.)

Première démonstration. — En se plaçant au premier point de vue de la définition précédente, il suffit de remarquer que tout plan sécant détermine, dans le plan [A, B], deux faisceaux rectilignes homographiques, dont les droites homologues déterminent une conique par leurs intersections mutuelles.

Deuxième démonstration. — En se plaçant au second point de vue, il suffit de remarquer que les deux divisions homographiques déterminées sur une transversale quelconque du système [A, B] ne peuvent avoir plus de deux points doubles, à moins de coïncider complétement.

Corollaire. — *Toute droite qui détermine sur deux droites quelconques* A, B *deux divisions homographiques décrit une surface du second degré.* Car cette droite peut être considérée comme intersection de plans homologues d'un système [A', B].

Théorème II. — *Les intersections d'une surface résultant d'un système de deux faisceaux homographiques de plans par une série de plans parallèles sont deux coniques homothétiques.*

Lemme. — *Étant donnés deux systèmes composés chacun de deux faisceaux homographiques rectilignes* $[O, O']$, $[O_1, O'_1]$, *si les droites de l'un des systèmes sont respectivement parallèles à celles de l'autre, les deux coniques résultantes sont homothétiques, quelles que soient les positions des sommets des faisceaux.*

Ce lemme, évident pour les coniques à branches infinies, se démontre aisément de la manière suivante, quelle que soit la forme des coniques. Soient OM, O'M' deux cordes parallèles de la conique $[O, O']$; le diamètre conjugué de ces cordes est la droite qui joint leurs milieux et qui passe, par conséquent, par le point I où se coupent les droites OM', $O'M$; ce diamètre est donc la médiane du triangle OIM; soient de même O_1M_1, $O'_1M'_1$ deux cordes de la seconde conique $[O_1, O'_1]$ parallèles entre elles et à OM, $O'M'$; par hypothèse, $O_1M'_1$ sera parallèle à OM' et O'_1M_1 à $O'M$; donc les deux triangles OIM, $O_1I_1M_1$ auront leurs côtés parallèles, donc leurs médianes seront aussi parallèles, ce qui démontre que les deux coniques $[O, O']$, $[O_1, O'_1]$ ont un même système de diamètres conjugués et sont par conséquent homothétiques.

Démonstration. — Il est évident qu'une série de plans parallèles détermineront dans un système $[A, B]$ des couples de faisceaux rectilignes homographiques; tous ces systèmes rectilignes projetés sur l'un des plans sécants seront bien dans le cas des systèmes rectilignes $[O, O']$, $[O_1, O'_1]$ qui ont été considérés dans le lemme précédent; leurs sommets seront placés d'une manière quelconque, mais les droites correspondantes dans les différents systèmes seront parallèles; donc toutes les coniques résultantes seront des courbes homothétiques.

Systèmes homothétiques dans l'espace. — Nous dirons que deux systèmes $[A, B]$, $[A_1, B_1]$ composés chacun de deux faisceaux homographiques de plans sont homothétiques si leurs axes A et A_1, B et B_1 sont respectivement parallèles et si les plans correspondants des deux systèmes sont parallèles.

Ceci posé, l'application du lemme qui nous a servi déjà à démontrer le théorème II fournit immédiatement le théorème suivant :

Théorème III. — *Tout plan sécant détermine dans deux systèmes homothétiques de plans deux systèmes homothétiques rectilignes, et par suite dans les surfaces résultantes des coniques homothétiques.*

Les trois théorèmes que nous venons d'énoncer renferment, comme on va le voir, toute la théorie des surfaces réglées du second degré.

La notation qui nous a servi à représenter un système de faisceaux homographiques de plans nous servira à représenter en même temps la surface résultant de l'intersection des plans homologues des deux faisceaux.

Nous allons étudier maintenant les diverses surfaces que peut donner le système [A, B].

CÔNES DU SECOND DEGRÉ.

4. J'appelle cône du second degré toute surface conique dont toutes les sections planes sont des coniques, ou qui ne peut être rencontrée par une droite en plus de deux points.

Théorème I. — *Toute surface* [A, B] *dont les axes homographiques se rencontrent est un cône du second degré.*

La surface est du second degré d'après le théorème I du n° 3, et toutes les génératrices rectilignes passent par le point de concours des axes.

Propriétés des cônes du second degré. — Dans tout cône du second degré, les sections par des plans parallèles sont homothétiques (3, théor. II). Ces sections sont l'une quelconque des trois coniques.

Toutes les coniques homothétiques obtenues en coupant le cône par des plans parallèles ont leurs centres sur une même ligne droite qu'on nomme diamètre conjugué de la direction des plans sécants; ceci se démontre par des considérations géométriques fort simples.

Tout plan mené par le sommet du cône divise en deux parties égales les cordes parallèles au diamètre conjugué de ce plan; encore très-simple à démontrer.

Tout plan mené par le sommet du cône qui est le centre de la surface se nomme plan diamétral.

Ceux de ces plans qui sont perpendiculaires aux directions des cordes qu'ils divisent en deux parties égales se nomment plans principaux.

On trouve aisément les trois plans principaux d'un cône; ainsi on commencera par faire voir que le plan qui contient les génératrices faisant entre elles un angle maximum est un plan principal; il suffira pour cela de mener un plan sécant perpendiculaire à l'une de ces génératrices, et on verra facilement que l'intersection des deux plans est un axe de la conique déterminée dans le cône par le plan sécant; puis on verra que le plan mené par la bissectrice de l'angle maximum perpendiculairement au premier plan principal est un second plan principal; enfin le troisième est le plan mené par le sommet du cône perpendiculaire à l'intersection des deux premiers.

Parmi les sections elliptiques du cône, on doit remarquer deux séries de plans parallèles donnant des sections circulaires; ces plans sont nécessairement perpendiculaires à un plan principal.

Du reste, l'étude purement géométrique des propriétés du cône est tellement simple, que je n'en parle ici que pour tracer un programme complet de la théorie des surfaces réglées du second degré.

Mais de même que dans l'homographie plane il y a deux modes de génération des coniques, nous aurons aussi deux modes de génération des surfaces réglées : soit en les considérant comme lieu des intersections de plans, ou bien comme enveloppes de plans mobiles; le théorème I relatif au cône correspond au premier mode, le suivant correspond au second.

Théorème II. — *Tout plan divisant homographique-*

ment deux droites fixes et passant par un point fixe a pour enveloppe de ses positions un cône du second degré tangent aux deux plans menés par chacune des droites et le point fixe.

On voit en effet que le plan mobile qui décrit bien une surface conique a pour trace sur un plan quelconque une tangente à une conique tangente aux traces des deux plans fixes; c'est l'application du théorème correspondant d'homographie plane.

5. On pourra représenter un cône du second degré considéré comme surface résultante d'un système homographique par la notation $[A_0, B_0]$, qui exprimera que les axes A et B des deux faisceaux se rencontrent, ou que leur plus courte distance est nulle.

Les différentes manières d'établir la correspondance des plans homologues des deux faisceaux seront les différents modes de génération du cône.

Exemples. — Droite s'appuyant sur une conique et passant par un point fixe.

Plan passant par un point fixe et tangent à une conique.

6. Cônes supplémentaires. — *Si par le sommet d'un cône* $[A_0, B_0]$ *on mène les plans tangents à ce cône et des perpendiculaires à ces plans, le lieu de ces perpendiculaires est un cône du second degré* $[a_0, b_0]$, *qu'on nomme le cône supplémentaire du premier.*

Il est aisé de voir en effet que les faisceaux ayant pour axes les droites a_0, b_0, respectivement perpendiculaires aux plans tangents suivant A_0 et B_0, et pour intersections les droites m_0 perpendiculaires aux plans tangents suivant les arêtes M_0 du premier cône, sont homographiques; car les trois plans tangents en A_0, B_0, M_0 forment un angle trièdre, et les trois perpendiculaires à ces plans a_0, b_0, m_0 un trièdre supplémentaire dans lequel les angles dièdres sont les suppléments des faces du premier; or on peut dire que le plan tangent mobile suivant M_0 divise homographiquement les deux faces fixes; donc dans le système $[a_0, b_0]$ les deux faisceaux sont homographiques, puisque le sinus de l'angle dièdre de deux plans est égal au sinus de l'angle de la face supplémentaire.

Ainsi donc la surface $[a_0, b_0]$ est un cône du second degré, et la démonstration précédente justifie suffisamment la dénomination de *cônes supplémentaires*. D'ailleurs, comme pour les trièdres supplémentaires, les propriétés des deux cônes sont réciproques.

Tout le monde connaît les belles propriétés des cônes supplémentaires indiquées par M. Chasles; aux deux séries de sections circulaires ou *plans cycliques* correspondent dans le cône supplémentaire deux droites qui leur sont perpendiculaires et que l'auteur de la *Géométrie supérieure* nomme *lignes focales* du second cône, et il y a toujours réciprocité.

Je terminerai ce qui concerne le cône par l'indication de ces deux énoncés de M. Chasles, qui sont des applications immédiates des théorèmes I et II du n° 4.

1° *Si, autour de deux droites fixes situées dans un même plan, on fait tourner deux plans rectangulaires, la droite d'intersection de ces deux plans décrira un cône du second degré dont les plans cycliques seront respectivement perpendiculaires aux deux droites.*

2° *Étant donnés deux plans fixes, si un point de leur intersection commune est pris comme sommet d'un angle droit mobile, dont les côtés se meuvent dans deux plans fixes respectivement, le plan de cet angle enveloppera un cône du second degré tangent aux deux plans fixes* *et dont les lignes focales seront perpendiculaires à ces deux plans respectivement.*

On résoudra encore très-simplement par les considérations précédentes la question suivante :

Trouver le lieu des points de l'espace dont les distances à deux droites fixes qui se coupent sont dans un rapport constant.

(*La suite prochainement.*)