Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 124-141
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__124_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 673

(voir 2e série, tome II, page 479);

PAR M. LAISANT,
Lieutenant du génie.

Inscrire dans une parabole un triangle abc *semblable à un triangle donné* ABC, *et dont un des sommets* a *soit situé en un point donné sur la courbe. Cas particulier où le triangle* ABC *est équilatéral.*

Soit a le point donné sur la parabole donnée (*). J'appelle AB le plus petit des deux côtés AB, AC, et je mène par a une corde quelconque $a\beta$ que je considère comme homologue de AB. Je construis sur $a\beta$ un triangle semblable à ABC. Le problème a deux solutions et me donne deux sommets γ, γ_1 homologues à C. L'intersection des lieux géométriques de ces points γ, γ_1 avec la parabole fournira la solution de la question. Or, l'angle $\beta a \gamma$ est constant; le rapport $\frac{a\gamma}{a\beta} = \frac{AC}{AB}$ l'est aussi. Donc on obtient le lieu du point γ en réduisant tous les rayons $a\beta$ dans un même rapport et en faisant tourner tout d'une pièce la courbe obtenue de l'angle a, laquelle courbe est nécessairement une parabole. De même, le lieu de γ_1 est une parabole égale qui aurait tourné du même angle en sens contraire. Notre intention n'est point ici de développer le calcul, assez fastidieux du reste, auquel donne lieu la recherche des points communs. Nous ferons seulement observer que, suivant la position du point a sur la parabole donnée, et les valeurs de l'angle a et du rapport $\frac{AC}{AB}$, les paraboles γ, γ_1 peuvent couper chacune la parabole donnée en trois ou deux points, ou en un seul point (non compris le point a nécessairement commun). Le cas de deux points communs est particulier, car il suppose un contact. En résumé, le problème peut avoir depuis six solutions jusqu'à deux. Il peut même n'en avoir qu'une, s'il s'agit d'un triangle isocèle, et que l'angle $c_1 a c_2$, formé par les deux solutions obtenues, soit égal à l'angle A. Cela arrive lorsque le point a est le sommet.

Les paraboles γ, γ_1 sont plus petites que la parabole

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

donnée dans l'hypothèse AC$<$AB. Elles lui deviennent égales dans le cas d'un triangle isocèle. Dans le cas du triangle équilatéral, on a en outre $A = 60$ degrés; de sorte que les éléments du calcul sont fixés. Comme nous n'avons pu trouver de forme simple pour ce calcul, ni dans l'exposition, ni dans les résultats, nous nous arrêtons ici, ayant simplement montré à quelle question peut se ramener le problème.

Note. — Une remarque analogue à celle que fait M. Laisant servirait à mettre en équation le problème plus général : *Inscrire dans une courbe donnée un triangle semblable à un triangle donné.* Dans quel cas le problème relatif à la parabole est-il susceptible d'une construction par la règle et le compas? P.

Question 773

(voir 2ᵉ série, t. V, p. 884);

Par M. Alfred GIARD,
Elève du collége de Douai (classe de M. Painvin).

Étant donnée une équation réciproque $f(x) = 0$, quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation en y, obtenue en posant

$$x + \frac{1}{x} = y,$$

soit elle-même réciproque?

Je rappellerai d'abord que si l'on pose $x + \frac{1}{x} = y$, on a la relation

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} x^n + \frac{1}{x^n} &= y^n - ny^{n-2} + n\frac{n-3}{2}y^{n-4} - n\frac{(n-4)(n-5)}{2.3.}y^{n-6} + \ldots \\ &\quad + (-1)^p n \frac{(n-p-1)(n-p-2)\ldots(n-2p+1)}{2.3.p} y^{n-2p} + \ldots \end{aligned}\right.$$

Cette formule a été établie dans les *Nouvelles Annales*, t. XX, 1861, p. 155.

Cela posé, considérons une équation de degré pair, dont les coefficients des termes équidistants des extrêmes soient égaux et de mêmes signes. Les autres cas se ramèneront au précédent par la suppression des racines $+1$ ou -1.

Soit donc l'équation

$$A_0 x^{2n} + A_1 x^{2n-1} + A_2 x^{2n-2} + \ldots + A_{n-1} x^{n+1} + A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0 = 0.$$

Divisons par x^n,

$$A_0\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + A_1\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) + \ldots + A_{n-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + A_n = 0.$$

Si l'on pose $x + \frac{1}{x} = y$, et que l'on développe les binômes de la forme $x^n + \frac{1}{x^n}$ d'après la formule (1), l'équation en y est

$$\begin{aligned}
&A_0 y^n + A_1 y^{n-1} + (A_2 - nA_0) y^{n-2} + [A_3 - (n-1)A_1] y^{n-3} \\
&+ \left[A_4 - (n-2)A_2 + n\frac{n-3}{2}A_0\right] y^{n-4} \\
&+ \left[A_5 - (n-3)A_3 + (n-1)\frac{n-4}{2}A_1\right] y^{n-5} \\
&+ \left[A_6 - (n-4)A_4 + (n-2)\frac{n-5}{2}A_2 - n\frac{(n-4)(n-5)}{2.3}A_0\right] y^{n-6} \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$+\left\{\begin{array}{l}A_{2k-1}-(n-2k+3)A_{2k-3}+(n-2k+5)\dfrac{n-2k+2}{2}A_{2k-5}\\ \quad -(n-2k+7)\dfrac{(n-2k+2)(n-2k+3)}{2.3.}A_{2k-7}+\ldots\\ \quad +(-1)^r(n-2k+2r+1)\\ \quad\times\dfrac{(n-2k+2)(n-2k+3)\ldots(n-2k+r)}{2.3\ldots r}A_{2k-2r-1}\pm\ldots\\ \quad\pm(-1)^{k-2}(n-3)\dfrac{(n-2k+2)(n-2k+3)\ldots(n-k-2)}{2.3\ldots(k-2)}A_3\\ \quad +(-1)^{k-1}(n-1)\dfrac{(n-2k+2)\ldots(n-k-1)}{2\ldots(k-1)}A_1\end{array}\right\}y^{n-2k+1}$$

$$+\left\{\begin{array}{l}A_{2k}-(n-2k+2)A_{2k-2}+(n-2k+4)\dfrac{n-2k+1}{2}A_{2k-4}\\ \quad -(n-2k+6)\dfrac{(n-2k+1)(n-2k+2)}{2.3}A_{2k-6}+\ldots\\ \quad +(-1)^r(n-2k+2r)\\ \quad\times\dfrac{(n-2k+1)(n-2k+2)\ldots(n-2k+r-1}{2.3\ldots r}A_{2k-2r}+\ldots\\ \quad +(-1)^{k-1}(n-2)\dfrac{(n-2k+1)(n-2k+2)\ldots(n-k-2}{2.3\ldots(k-1)}A_2\\ \quad +(-1)^k n\dfrac{(n-2k+1)\ldots(n-k-1)}{2\ldots k}A_0\end{array}\right\}y^{n-2k}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{array}{l}+[A_{n-1}-3A_{n-3}+5A_{n-5}-7A_{n-7}+\ldots\\ \quad +(-1)^r(2r+1)A_{n-2r-1}+\ldots\pm(n-3)A_3\mp(n-1)A_1]y\\ +[A_n-2A_{n-2}+2A_{n-4}\ldots+(-1)^rA_{n-2r}+\ldots\pm2A_2\mp2A_0]=0.\end{array}$$

Pour écrire les derniers termes nous avons supposé n pair. Si n était impair, on aurait :

$$\begin{array}{l}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +[A_{n-1}-3A_{n-3}+5A_{n-5}+\ldots\\ \quad +(-1)^r(2r+1)A_{n-2r-1}+\ldots\pm(n-2)A_2\mp nA_0]y\\ +[A_n-2A_{n-2}+2A_{n-4}\ldots\\ \qquad +(-1)^r2A_{n-2r}+\ldots\pm2A_3\mp2A_1]=0.\end{array}$$

Pour exprimer que cette équation est réciproque si elle est de degré impair, nous écrirons que les coefficients des termes équidistants des extrêmes sont égaux et de mêmes signes, ou égaux et de signes contraires. Si elle est de degré pair, nous écrirons que ces coefficients sont égaux et de même signe, ou que le terme du milieu est nul et que les coefficients équidistants sont égaux et de mêmes signes, ou égaux et de signes contraires.

1. Soit $n = 2p$. Alors le nombre des termes est $2p+1$, il y a un terme du milieu en y^{n-p} et l'on a les conditions :

$$A_0 = A_n - 2A_{n-2} + 2A_{n-4} \ldots + (-1)^r A_{n-2r} + \ldots \pm 2A_2 \mp 2A_0,$$

$$A_1 = A_{n-1} - 3A_{n-3} + 5A_{n-5} \ldots + (-1)^r A_{n-2r-1} + \ldots \pm (n-3) A_3 \mp (n-1) A_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left\{\begin{aligned} & A_{p-1} - (n-p+3) A_{p-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (-1)^r (n-p+2r+1) \frac{(n-p+2)\ldots(n-p+r)}{2\ldots r} A_{p-2r-1} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \pm (n-3) \frac{(n-p+2)(n-p+3)\ldots\left(n-\frac{p}{2}-2\right)}{2.3\ldots\left(\frac{p}{2}-2\right)} A_3 \\ & \mp (n-1) \frac{(n-p+2)(n-p+3)\ldots\left(n-\frac{p}{2}-1\right)}{2.3\ldots\left(\frac{p}{2}-1\right)} A_1 \end{aligned}\right\}$$

$$
=\left\{\begin{array}{l}
A_{p+1}-(n-p+1)A_{p-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+(-1)^r(n-p+2r-1)\dfrac{(n-p)(n-p+1)\ldots(n-p+r-2)}{2\ 3\ldots r}A_{p-2r+1} \\
+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\pm(n-3)\dfrac{(n-p)(n-p+1)\ldots\left(n-\frac{p}{2}-3\right)}{2.3\ldots\left(n-\frac{p}{2}-1\right)}A_3 \\
\mp(n-1)\dfrac{(n-p)(n-p+1)\ldots\left(n-\frac{p}{2}-2\right)}{2.3\ldots\frac{p}{2}}A_1
\end{array}\right\}.
$$

Pour écrire la dernière égalité nous avons supposé p pair, de sorte que $\frac{p}{2}$ est un nombre entier. Si p était un nombre impair, on aurait :

$$
\left\{\begin{array}{l}
A_{p-1}-(n-p+3)A_{p-3}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+(-1)^r(n-p+2r+1)\dfrac{(n-p+2)\ldots(n-p+r)}{2\ldots r}A_{p-2r-1} \\
+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\pm(n-2)\dfrac{(n-p+2)\ldots\left(n-\frac{p+3}{2}\right)}{2\ldots\frac{p-3}{2}}A_2 \\
\mp n\dfrac{(n-p+2)\ldots\left(n-\frac{p+1}{2}\right)}{2\ldots\frac{p-1}{2}}A_0
\end{array}\right\}
$$

$$
=\left\{\begin{array}{l}
A_{p+1}-(n-p+1)A_{p-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \ldots\ldots\ldots \\
+(-1)^r(n-p+2r-1\;\dfrac{(n-p)(n-p+1)\ldots(n-p+r-2)}{2.3\ldots r}\;A_{p-2r+1} \\
+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\pm(n-2)\dfrac{(n-p)(n-p+1)\ldots\left(n-\dfrac{p+5}{2}\right)}{2.3\ldots\dfrac{p-1}{2}}A_2 \\
\mp n\,\dfrac{(n-p)(n-p+1)\ldots\left(n-\dfrac{p+3}{2}\right)}{2.3\ldots\dfrac{p+1}{2}}A_0
\end{array}\right\}.
$$

p étant impair, $\dfrac{p-1}{2}$, $\dfrac{p+3}{2}$,… sont des nombres entiers.

Si on exprime que le terme du milieu est nul, on pourra mettre le double signe devant les seconds membres des relations précédentes, et l'on aura de plus la condition :

Si p est pair,

$$
\begin{aligned}
&A_p-(n-p+2)A_{p-2}+(n-p+4)\frac{n-p+1}{2}A_{p-4}-\ldots \\
&\quad+(-1)^r(n-p+2r)\frac{(n-p+1)(n-p+2)\ldots(n-p+r-1)}{2.3\ldots r}A_{p-2r}+\ldots \\
&\qquad\pm(n-2)\frac{(n-p+1)(n-p+2)\ldots\left(n-\dfrac{p}{2}-2\right)}{2.3\ldots\left(\dfrac{p}{2}-1\right)}A_2 \\
&\qquad\qquad\mp n\frac{(n-p+1)\ldots\left(n-\dfrac{p}{2}-1\right)}{2\ldots\dfrac{p}{2}}A_0=0.
\end{aligned}
$$

Si p est impair,

$$A_p-(n-p+2)A_{p-2}+(n-p+4)\frac{n-p+1}{2}A_{p-4}+\ldots$$
$$+(-1)^r(n-p+2r\frac{(n-p+1)(n-p+2)\ldots(n-p+r-1)}{2.3\ldots r}A_{p-2r}+\ldots$$
$$\pm(n-3)\frac{(n-p+1)(n-p+2)\ldots\left(n-\frac{p+5}{2}\right)}{2.3\ldots\frac{p-3}{2}}A_3$$
$$\mp(n-1)\frac{(n-p+1)(n-p+2)\ldots\left(n-\frac{p+3}{2}\right)}{2.3\ldots\frac{p-1}{2}}A_1=0.$$

2. Supposons maintenant n impair : soit $n=2p+1$; alors le nombre des termes est $2p+2$, les deux termes du milieu sont de degré $n-p$ et $n-p-1$, et l'on a les conditions :

$$A_0=\pm[A_n-2A_{n-2}+2A_{n-4}\ldots$$
$$+(-1)^r 2A_{n-2r}+\ldots\pm 2A_3\mp 2A_1],$$
$$A_1=\pm[A_{n-1}-3A_{n-3}+5A_{n-5}\ldots$$
$$+(-1)^r(2r+1)A_{n-2r-1}+\ldots\pm(n-2)A_2\mp nA_0]$$

. . . . ,

$$\left\{\begin{aligned}&A_p-(n-p+2)A_{p-2}+\ldots\ldots\ldots\\&+\ldots\ldots\ldots\\&+(-1)^r(n-p+2r)\frac{(n-p+1)\ldots(n-p+r-1}{2\ldots r}A_{p-2r}\\&+\ldots\ldots\ldots\\&\pm(n-2)\frac{(n-p+1)(n-p+2)\ldots\left(n-\frac{p}{2}\right)}{2.3\ldots\left(\frac{p}{2}-1\right)}A_2\\&\mp n\frac{(n-p+1)\ldots\left(n-\frac{p}{2}-1\right)}{2\ldots\frac{p}{2}}A_0\end{aligned}\right\}$$

$$
= \mp \left\{ \begin{array}{l}
A_{p+1} - (n-p+1) A_{p-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ (-1)^r (n-p+2r-1) \dfrac{(n-p)(n-p+1)\ldots(n-p+r-2)}{2.3\ldots r} A_{p-2r+1} \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\pm (n-3) \dfrac{(n-p)(n-p+1)\ldots\left(n-\frac{p}{2}-3\right)}{2.3\ldots\left(\frac{p}{2}-1\right)} A_3 \\
\mp (n-1) \dfrac{(n-p)(n-p+1)\ldots\left(n-\frac{p}{2}-2\right)}{2.3\ldots\frac{p}{2}} A_1
\end{array} \right\}.
$$

En écrivant la dernière égalité nous avons supposé p pair; si p était impair on aurait :

$$
\left\{ \begin{array}{l}
A_p - (n-p+2) A_{p-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ (-1)^r (n-p+2r) \dfrac{(n-p+1)\ldots(n-p+r-1)}{2\ldots r} A_{p-2r} \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\pm (n-3) \dfrac{(n-p+1)(n-p+2)\ldots\left(n-\frac{p+5}{2}\right)}{2.3\ldots\frac{p-3}{2}} A_3 \\
\mp (n-1) \dfrac{(n-p+1)(n-p+2)\ldots\left(n-\frac{p+3}{2}\right)}{2.3\ldots\frac{p-1}{2}} A_1
\end{array} \right\}
$$

$$\pm\left\{\begin{array}{l}
A_{p+1}-(n-p+1)A_{p-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+(-1)^r(n-p+2r-1)\dfrac{(n-p)(n-p+1)\ldots(n-p+r-2)}{2.3\ldots r}A_{p-2r+1}\\
+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\pm(n-2)\dfrac{(n-p)(n-p+1)\ldots\left(n-\dfrac{p+5}{2}\right)}{2.3\ldots\dfrac{p-1}{2}}A_2\\
\mp n\dfrac{(n-p)(n-p+1)\ldots\left(n-\dfrac{p+3}{2}\right)}{2.3\ldots\dfrac{p+1}{2}}A_0
\end{array}\right\}.$$

Si l'on suppose $A_0 = 1$ dans le cas où n est pair et lorsqu'il y a un terme du milieu, on a $\frac{n}{2}$ égalités pour déterminer $A_1, A_2, \ldots, A_n$; il reste donc $\left(n-\frac{n}{2}\right)$ ou $\frac{n}{2}$ coefficients arbitraires.

Si l'on suppose qu'il n'y a pas de terme du milieu, c'est-à-dire si l'on écrit que le coefficient de ce terme est nul, on aura $\frac{n}{2}+1$ ou $\frac{n+2}{2}$ égalités; il restera donc $\left(n-\frac{n+2}{2}\right)$ ou $\frac{n-2}{2}$ coefficients indéterminés.

Si n est impair, on aura $\frac{n+1}{2}$ égalités, et il n'y aura plus que $\left(n-\frac{n+1}{2}\right)$ ou $\frac{n-1}{2}$ coefficients arbitraires.

La question se traiterait de la même manière si l'équation donnée en x n'avait pas de terme du milieu. Si, le terme du milieu manquant, les coefficients des termes équidistants des extrêmes étaient égaux et de signes contraires, on ramènerait l'équation à la forme étudiée en divisant par $x^2 - 1$.

Applications. — 1° Considérons l'équation

$$x^6 + A_1 x^5 + A_2 x^4 + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + 1 = 0.$$

L'équation en y sera

$$y^3 + A_1 y^2 + (A_2 - 3) y + A_3 - 2A_1 = 0.$$

Pour que cette équation soit réciproque, il faut que l'on ait, d'après les formules générales (2),

$$1 = A_3 - 2A_1, \quad A_1 = A_2 - 3$$

ou

$$1 = - A_3 + 2A_1, \quad A_1 = - A_2 + 3.$$

Prenons A_1 arbitraire, on a

$$A_2 = A_1 + 3, \quad A_3 = 2A_1 + 1$$

ou

$$A_2 = - A_1 + 3, \quad A_3 = 2A_1 - 1.$$

L'équation en y devient

$$y^3 + A_1 y^2 + A_1 y + 1 = 0,$$

ou

$$y^3 + A_1 y^2 - A_1 y - 1 = 0;$$

et l'équation en x prend l'une des deux formes

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & x^6 + A_1 x^5 + (A_1 + 3) x^4 \\ & \quad + (2A_1 + 1) x^3 - (A_1 + 3) x^2 + A_1 x + 1 = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & x^6 + A_1 x^5 - (A_1 - 3) x^4 \\ & \quad + (2A_1 + 1) x^3 - (A_1 - 3) x^2 + A_1 x + 1 = 0. \end{aligned} \right.$$

2° En appliquant les mêmes méthodes au huitième degré, nous aurons trois types d'équations de ce degré *doublement réciproques*, savoir :

$$(1)\ \left\{\begin{aligned} &x^8 + A_1x^7 + A_2x^6 + 4A_1x^5 + (2A_2 - 1)x^4 \\ &\qquad + 4A_1x^3 + A_2x^2 + A_1x + 1 = 0. \end{aligned}\right.$$

$$(2)\ x^8 + A_1x^7 + 4x^6 + 4A_1x^5 + 7x^4 + 4A_1x^3 + 4x^2 + A_1x + 1 = 0.$$

$$(3)\ x^8 + A_1x^7 + 4x^6 + 2A_1x^5 + 5x^4 + 2A_1x^3 + 4x^2 + A_1x + 1 = 0.$$

Note. — Autre solution de M. Bodemer, professeur au collége de Mulhouse.

Question 790

(voir 2ᵉ série, t. V, p. 548) ;

Par M. A. LEMAITRE,
Maître répétiteur au lycée de Besançon.

Démontrer :

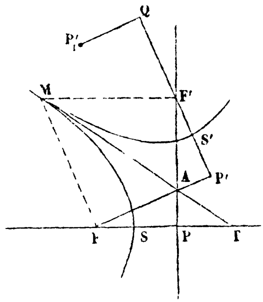
1° *Que le mouvement de l'angle droit donné par Newton pour tracer la cissoïde est produit par le roulement d'une parabole sur une autre parabole égale à la première.*

2° *Que les lignes décrites par les différents points du plan de la parabole mobile sont des courbes du troisième degré. (Sept espèces différentes, d'après la classification de Newton.) De là, pour toutes ces courbes, une génération mécanique semblable à celle de la cissoïde.*

2° *Que les roulettes ainsi obtenues ont une génération géométrique simple (par points); faire voir, en outre, comment on peut passer de cette génération géométrique à la génération mécanique (mouvement continu).*

(E. Habich.)

1° Supposons que, dans le roulement de la parabole MS', le sommet S' se soit trouvé en contact avec le sommet S de la parabole MS; le point de contact étant venu en M, l'arc MS' est égal à l'arc MS, et, à cause de l'égalité des deux paraboles, les points homologues seront, pour cette position de la figure, symétriques par rapport à la tan-



gente commune aux deux courbes. Le point F′ symétrique du point F est le foyer de la parabole MS′, et se trouve, d'après un principe connu, sur la directrice F′P de la parabole MS. Dans le mouvement de la parabole MS′, il décrira cette directrice; tandis que la directrice FP′ de la parabole MS′ passe constamment par le foyer F symétrique de F′, en vertu du même théorème. Du reste, la distance F′P′ du foyer F à la directrice est constamment égale à FP, et le sommet S′ est le milieu de cette distance.

On a donc un angle droit FP′F′, dont un côté passe par un point fixe F, et l'extrémité F′ de l'autre côté constant en longueur décrit une droite fixe distante du point fixe F d'une longueur égale à celle du côté F′P′. Le point S′ décrira donc une cissoïde, d'après la règle de Newton, ce qui justifie la première partie de l'énoncé.

2° Soit P'_1 un point du plan de la parabole, entraîné dans le mouvement de celle-ci; ce point, par rapport à la tangente commune, restera constamment symétrique du point homologue P, pris dans le plan de la parabole fixe. *Le problème se ramène donc à trouver le lieu du* *symétrique de ce point par rapport aux tangentes de la parabole.*

L'équation de la tangente à la parabole, rapportée à son axe et à la tangente au sommet, est

$$(1) \qquad my = m^2 x + \frac{p}{2},$$

m étant variable.

Les coordonnées du point P étant α, β, celles du point P'_1, son symétrique par rapport à la droite dont l'équation est (1), étant X, Y, l'équation de la droite perpendiculaire à la droite (1), et qui joint ces deux points, est

$$(2) \qquad m(y - \beta) + (x - \alpha) = 0.$$

Le point d'intersection des droites (1) et (2) étant le milieu de la droite (α, β) (X, Y), ses coordonnées satisfont aux relations

$$x = \frac{X + \alpha}{2}, \quad y = \frac{Y + \beta}{2}.$$

Remplaçant x et y par ces valeurs dans les équations (1) et (2), on obtient les égalités

$$m(Y + \beta) = m^2(X + \alpha) + p,$$
$$m(Y - \beta) + X - \alpha = 0,$$

entre lesquelles il suffit évidemment d'éliminer m pour obtenir l'équation du lieu, ce qui donne

$$(\alpha - X)(Y - \beta)(Y + \beta) = (\alpha - X)^2(\alpha + X) + p(Y - \beta)^2.$$

On obtient une vérification de cette formule en faisant $\alpha = 0$, $\beta = 0$, c'est-à-dire en supposant que le point qui décrit la courbe est le sommet de la parabole mobile. On trouve

$$-XY^2 = X^3 + pY^2, \quad \text{ou} \quad Y^2 = \frac{-X^3}{p + Y},$$

ce qui est l'équation de la cissoïde.

Une autre vérification consiste à faire $\alpha = \frac{p}{2}$, $\beta = 0$. On doit retrouver la directrice, et le cercle de rayon nul qui a le foyer pour centre. C'est ce qui a lieu :

$$\left(\frac{p}{2} - X\right) Y^2 = \left(\frac{p}{2} - X\right)^2 \left(\frac{p}{2} + X\right) + pY^2,$$

ou

$$\left(\frac{p}{2} - X\right)^2 \left(\frac{p}{2} + X\right) + Y^2 \left(\frac{p}{2} + X\right) = 0,$$

ou

$$\left[\frac{p}{2} + X\right] \left[Y^2 + \left(\frac{p}{2} - X\right)^2\right] = 0.$$

Il résulte de là que ces courbes du troisième degré peuvent être engendrées par le roulement d'une parabole sur une autre.

3° Au lieu de considérer le point P comme lié au mouvement de la parabole, on peut le considérer comme lié au mouvement de l'angle droit FP′F′, mouvement qui est une conséquence du premier. Du point P, nous abaissons la perpendiculaire PQ sur la droite P′F′. La longueur de cette perpendiculaire est constante. Ainsi la génération d'une quelconque de ces courbes ne diffère de celle de la cissoïde, donnée par Newton, que parce que, au lieu de choisir le point milieu S′ du côté constant FP′ de l'angle droit, on prend une longueur FQ constante sur cette droite; en ce point Q, on élève une perpendiculaire de longueur constante. L'extrémité P′ de cette perpendiculaire décrit la courbe.

On peut trouver le centre instantané de rotation des points liés au mouvement de l'angle droit F′P′F. D'après la génération première, on sait que ce point parcourt la parabole fixe, et n'est autre que le point de contact M des deux paraboles. Ceci va nous fournir un moyen de revenir de la deuxième génération à la première. En effet, la vitesse du point F′ est dirigée suivant F′P.

Le centre instantané de rotation se trouve donc sur la perpendiculaire F′M menée par le point F′ à cette ligne.

Le point qui est actuellement en F se déplace d'une quantité infiniment petite sur la direction infiniment voisine de la droite FP′. La vitesse de ce point est donc dirigée suivant FP′; et, par suite, le centre instantané de rotation se trouve sur la perpendiculaire MF à cette droite. Ce point n'est donc autre que le point M, intersection de MF et de MF′.

Pour revenir de la génération par points que nous venons d'indiquer à la génération première, par le roulement de la parabole mobile sur une parabole fixe, il faut d'abord démontrer que le lieu du point M est une parabole. Il suffit pour cela de démontrer que MF = MF′. Soit A le point où la droite mobile FP′ rencontre la droite mobile F′P. Joignons AM : les deux triangles rectangles sont égaux comme rectangles, ayant l'hypoténuse F′M commune, et le côté AF égal au côté AF′, à cause des deux triangles rectangles égaux APF, AP′F′; par suite MF = MF′.

Or, les deux triangles APF, AP′F′ sont égaux comme rectangles ayant deux angles opposés par le sommet, et un côté FP égal par hypothèse au côté FP′. (*Voir* la génération de la cissoïde et celle des autres courbes qui s'en déduit.) De l'égalité de ces deux triangles, résulte celle de leurs hypoténuses FA, F′A; de celle-ci, comme on l'a vu, l'égalité des triangles AFM, AF′M, et celle de FM et de F′M. Le lieu du centre instantané est donc une parabole.

Pour démontrer que la courbe roulante est une parabole, il faut démontrer que tel est le lieu du centre instantané sur le plan mobile de l'angle droit $FP'F$. Mais la distance du point M au point F' mobile sur la droite $F'P$ est constamment égale à la distance FM à la droite FP' du système mobile. Le point M se trouve donc sur une parabole mobile, ayant F' pour foyer, et la droite FP' pour directrice.

Note. — La même question a été traitée par MM. Soudan et Vivarès, élèves de Sainte-Barbe; Ferdinand Roux, du lycée de Nîmes. M. Laisant, à l'occasion de cette question, a traité le cas d'une courbe quelconque roulant sur une courbe égale.