Nouvelles annales de mathématiques

L. Painvin

# Note sur la diminution de la classe d'une courbe

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 6 (1867), p. 113-124
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__113_0>

# NOTE SUR LA DIMINUTION DE LA CLASSE D'UNE COURBE;

Par M. L. PAINVIN.

1. Je ne m'occuperai, dans cette Note, que des points doubles.

Lorsque le point double est un point double ordinaire, c'est-à-dire ayant deux tangentes distinctes, la classe de la courbe se trouve diminuée de *deux* unités, et de deux unités seulement.

Lorsque le point double est un point de rebroussement, c'est-à-dire lorsque les deux tangentes coïncident, la diminution de la classe est, dans le cas le plus général, de *trois* unités; mais elle peut être supérieure à ce nombre.

Voici la proposition qu'on peut énoncer :

« Si la tangente de rebroussement a avec la courbe
» un contact proprement dit de l'ordre $p$, c'est-à-dire si
» elle rencontre la courbe en $(p+2)$ points coïncidant
» avec le point de rebroussement; si, en même temps,
» cette tangente a, avec la première polaire d'un point
» quelconque, un contact effectif de l'ordre $(p-k)$,
» c'est-à-dire si elle rencontre la première polaire
» en $(p-k+1)$ points coïncidents, la classe de la
» courbe sera diminuée de

$$(p-k+2) \text{ unités};$$

» le nombre entier $k$ peut varier depuis $0$ jusqu'à $(p-1)$. »

Ainsi, lorsque la tangente de rebroussement a avec la courbe un contact effectif de l'ordre $p$, la diminution de la classe peut varier de 3 à $(p + 2)$ unités. Je remarquerai que, lorsque la tangente de rebroussement a avec la courbe un contact effectif de l'ordre $p$, elle est en même temps tangente multiple de l'ordre $p$ de multiplicité; dans le cas actuel, tous ses points de contact coïncident avec le point de rebroussement.

2. Pour établir cette proposition, je rappellerai d'abord que les points de contact des tangentes qu'on peut mener d'un point à une courbe sont donnés par les intersections de la courbe avec la première polaire du point; et lorsque la courbe possède un point double, les droites qui passent par le point double ne sont pas, quoique satisfaisant à la condition analytique du contact, des tangentes proprement dites.

Prenons le point de rebroussement pour origine et la tangente pour axe des $y$, puis rendons homogène l'équation de la courbe en représentant les coordonnées d'un point par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$. Nous admettrons que le terme en $z^{m-p-1}$ soit le premier à partir duquel tous les termes renferment, jusqu'au dernier, le facteur $x$; le dernier terme sera $z^{m-2}x^2$, puisque l'origine O est le point de rebroussement et que la tangente est $Oy$. Nous supposerons, en second lieu, que le terme en $z^{m-p+k-1}$ soit le premier à partir duquel le facteur $x$ entre dans tous les termes, jusqu'au dernier, avec un exposant au moins égal à 2; le terme qui précède, en $z^{m-p+k-2}$, ne contient le facteur $x$ qu'à la première puissance; quant aux termes qui précèdent celui-ci, ils renferment le facteur $x$ à des puissances quelconques égales ou supérieures à l'unité. En mettant ces diverses circonstances en évidence, l'équation de la courbe pourra s'écrire :

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
C = {} & \varphi_m(x, y) + z\varphi_{m-4}(x, y) + \ldots + z^{m-p-2}\varphi_{p+2}(x, y) \\
& + z^{m-p-1} x^i \varphi_{p-i+1}(x, y) + z^{m-p} x^j \varphi_{p-j}(x, y) + \ldots \\
& + z^{m-p+k-2} x \varphi_{p-k+1}(x, y) \\
& + z^{m-p+k-1} x^{i_1} \varphi_{p-k-i_1+1}(x, y) \\
& + z^{m-p+k} x^{i_2} \varphi_{p-k+i_2}(x, y) + \ldots \\
& + z^{m-4} x^{i_h} \varphi_{4-i_h}(x, y) + z^{m-3} x^2 (\mathrm{A}x + \mathrm{B}y) \\
& \qquad + z^{m-2} x^2 = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Les fonctions $\varphi_i$ sont des fonctions homogènes en $x$ et $y$ et de degré $i$; les exposants $i, j$ de $x$, dans la seconde ligne, ont des valeurs égales ou supérieures à l'unité; les exposants $i_1, i_2, \ldots i_h$ ont des valeurs égales ou supérieures à 2.

Le nombre entier $k$ peut varier depuis zéro jusqu'à $(p-1)$. Lorsque $k=1$, tous les termes, à partir du terme en $z^{m-p-1}$ exclusivement, renferment $x$ avec un exposant au moins égal à 2; lorsque $k = p-1$ l'avant-dernier terme ne contient le facteur $x$ qu'à la première puissance.

Il est visible, d'après l'équation (1), que l'origine O est un point double de rebroussement pour la courbe C; en outre, la tangente de rebroussement rencontre la courbe en $(p+2)$ points coïncidant avec le point O, car pour $x=0$ le premier membre de l'équation (1) est divisible par $y^{p+2}$; et, comme l'origine O est un point double, la *tangente de rebroussement aura donc avec la courbe un contact effectif de l'ordre p.*

La première polaire d'un point $(\alpha, \beta, \gamma)$ du plan a pour équation

$$
\alpha \frac{dC}{dx} + \beta \frac{dC}{dy} + \gamma \frac{dC}{dz} = 0,
$$

c'est-à-dire

$$
\left.\begin{aligned}
\mathrm{P} = 0 = & \left[\alpha \frac{d\varphi_m}{dx} + \beta \frac{d\varphi_m}{dy} + \varphi\varphi_{m-1}(x, y)\right] + \ldots \\
& + \left[\alpha \frac{d\varphi_{p+2}}{dx} + \beta \frac{d\varphi_{p+2}}{dy} + (m - p - 1)\, x^i \varphi_{p-i+1}(x, y)\right] z^{m-p-2} \\
& + z^{m-p-1}\left[\alpha x^i \frac{d\varphi_{p-i+1}}{dx} + \beta x^i \frac{d\varphi_{p-i+1}}{dy} + \gamma(m-p)\, x^j \varphi_{p-j}(x, y)\right. \\
& \qquad \left. + i\alpha x^{i-1} \varphi_{p-i+1}(x, y)\right] + \cdots \\
& + z^{m-p+k-2}\left[\alpha x \frac{d\varphi_{p-k+1}}{dx} + \beta x \frac{d\varphi_{p-k+1}}{dy}\right. \\
& \qquad + \gamma(m - p + k - 1)\, x^{i_1} \varphi_{p-k+i_1+1}(x, y) \\
& \qquad \left. + \alpha\varphi_{p-k+1}(x, y)\right] \\
& + z^{m-p+k-1}\left[\alpha x^{i_1} \frac{d\varphi_{p-k-i_1+1}}{dx} + \beta x^{i_1} \frac{d\varphi_{p-k-i_1+1}}{dy}\right. \\
& \qquad + \gamma(m - p + k)\, x^{i_2} \varphi_{p-k-i_2}(x, y) \\
& \qquad \left. + i_1 \alpha x^{i_1-1} \varphi_{p-k-i_1+1}(x, y)\right] \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + z^{m-4}\left[\alpha x^{i_h} \frac{d\varphi_{4-i_4}}{dx} + \beta x^{i_h} \frac{d\varphi_{4-i_h}}{dy} + \gamma(m - 3)\, x^2(\mathrm{A}x + \mathrm{B}y)\right. \\
& \qquad \left. + i_h \alpha x^{i_h-1} \varphi_{4-i_4}(x, y)\right] \\
& + z^{m-3}[\alpha x^2.\mathrm{A} + \beta x^2.\mathrm{B} + \gamma(m-2)\, x^2 + 2\alpha x(\mathrm{A}x + \mathrm{B}y)] + z^{m-2}.2\alpha x.
\end{aligned}\right\} \tag{2}
$$

Le point O est un point simple pour la première polaire d'un point *quelconque*, la tangente est la droite O$y$. En faisant $x = 0$, on constate que le premier membre de l'équation (2) est divisible par $y^{p-k+1}$; car le terme du moindre degré en $y$ provient de $\varphi_{p-k+1}(0, y)$; et, d'après les hypothèses admises, $\varphi_{p-k+1}(x, y)$ ne renferme pas le facteur $x$. Ainsi la droite O$y$ rencontre la première polaire en $(p - k + 1)$ points coïncidant avec le point O; *la tangente de rebroussement a donc avec la première polaire d'un point quelconque un contact effectif du $(p - k)^{ième}$ ordre.*

Il est facile de voir que, si à partir du terme en $z^{m-p-1}$ inclusivement, tous les termes de l'équation (1) renferment le facteur $x$ avec un exposant au moins égal à 2, la droite O$y$ a, avec la première polaire P, un contact effectif du $p^{ième}$ ordre; car alors le dernier terme $\varphi_{p-k+1}(x, y)$ de la troisième ligne disparaîtra, et tous les termes de l'équation (2) s'annuleront jusqu'au terme en $z^{m-p+2}$ exclusivement.

Ce cas particulier se déduit évidemment de l'expression précédente $(p - k)$, en y supposant $k = 0$; on peut ainsi regarder le nombre entier $k$ comme variant de zéro à $(p - 1)$.

Il résulte de ces considérations que la courbe C et la première polaire P ont $(p - k + 2)$ points communs coïncidant avec le point O, savoir : deux points provenant de ce que la polaire P passe par le point double de la courbe, et $(p - k)$ points provenant de l'ordre du contact, c'est-à-dire $(p - k)$ points communs consécutifs sur la direction O$y$.

Donc, *le nombre des tangentes proprement dites ou la classe de la courbe de* C *est diminuée de*

$$(p - k + 2) \text{ unités.}$$

3. J'ai dit que *la tangente de rebroussement, qui a avec la courbe un contact effectif de l'ordre p, était une tangente multiple de l'ordre p de multiplicité.*

Pour le démontrer, rappelons la définition des tangentes multiples :

Une tangente est multiple de l'ordre $p$ lorsque, parmi les tangentes menées à la courbe d'un point *quelconque* de cette droite, il y a toujours $p$ tangentes coïncidant avec la droite considérée.

Déterminons ce nombre dans le cas de la tangente $Oy$; pour cela, il nous faut étudier l'intersection de la courbe C avec la première polaire d'un point quelconque de la droite $Oy$. Or, la première polaire d'un point quelconque de $Oy$ se déduira de l'équation (2) en y supposant $\alpha = 0$; on trouve ainsi

$$
\text{P}' \quad (3) \left\{
\begin{aligned}
0 = {} & \left[\beta \frac{d\varphi_m}{dy} \gamma \varphi_{m-1}(x, y)\right] + \ldots \\
& + \left[\beta \frac{d\varphi_{p+2}}{dy} + (m-p-1)\, x^{\iota} \varphi_{p-\iota+1}(x, y)\right] z^{m-p-2} \\
& + z^{m-p-1}\left[\beta x^{\iota} \frac{d\varphi_{p-i+1}}{dy} + \gamma (m-p)\, x^{\iota} \varphi_{p-j}(x, y)\right] + \ldots \\
& + z^{m-p+k-2}\left[\beta x \frac{d\varphi_{p-k+1}}{dy} + \gamma (m-p+h-1)\, x^{\iota_1} \varphi_{p-k-\iota_1+1}(x, y)\right] \\
& + z^{m-p+k-1}\left[\beta x^{\iota_1} \frac{d\varphi_{p-k-\iota_1+1}}{dy} + \gamma (m-p-h)\, x^{\iota_2} \varphi_{p-h+\iota_2}(x, y)\right] \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + z^{m-4}\left[\beta x^{\iota_h} \frac{d\varphi_{4-\iota_4}}{dy} + \gamma (m-2)\, x^2 (\text{A}x + \text{B}y)\right] \\
& + z^{m-3}[\beta \text{B} + \gamma (m-2)]\, x^2.
\end{aligned}
\right.
$$

Le point O est aussi un point de rebroussement pour la polaire P′, et $Oy$ est la tangente de rebroussement.

Pour reconnaître quel est le nombre des points coïncidant avec O et communs aux deux courbes C ou (1) et P′ ou (3), rappelons d'abord ce fait dont il est facile de se rendre compte :

Si deux courbes ont un point double commun et les mêmes tangentes distinctes en ce point double; si, en outre, ces tangentes ont, avec l'une des courbes, la première un contact effectif de l'ordre I, la deuxième un contact effectif de l'ordre J, et que, pour les branches correspondantes de la seconde courbe, les ordres de contact effectif de ces tangentes soient au moins égaux à I et J, les deux courbes en question auront

$$(4 + \mathrm{I} + \mathrm{J})$$

points communs et coïncidant avec le point double.

Prenons maintenant deux courbes ayant en commun un point *double ordinaire* avec tangentes communes, et donnant comme cas particuliers les deux courbes (C) et (P′); puis cherchons le nombre des points communs à ces deux courbes et coïncidant avec l'origine.

Or, les équations des deux courbes (C) et (P′) seront évidemment données par les deux équations suivantes :

$$
\begin{aligned}
C_1 = 0 = {} & \varphi_m(x, y) + z\varphi_{m-1}(x, y) + \ldots + z^{m-p-2}\varphi_{p+2}(x, y) \\
& + z^{m-p-1} x^i \varphi_{p-i+1}(x, y) + z^{m-p} x^j \varphi_{p-j}(x, y) + \ldots \\
& + z^{m-p+k-2} x \varphi_{p-k+1}(x, y) \\
& + z^{m-p+k-1} x^{i_1-1}(x - \lambda y)\varphi_{p-k-i_1+1}(x, y) \\
& + z^{m-p+k} x^{i_2-1}(x - \lambda y)\varphi_{p-k-i_2}(x, y) + \ldots \\
& + z^{m-4} x^{i_h-1}(x - \lambda y)\varphi_{4-i_h}(x, y) \\
& + z^{m-3} x(x - \lambda y) \mathrm{A}x + \mathrm{B}y) + z^{m-2} x(x - \lambda y),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P'_1 = 0 = {} & \left[\beta \frac{d\varphi m}{dy} + \gamma \varphi_{m-1}(x, y)\right] + \ldots \\
& + \left[\beta \frac{d\varphi_{p+2}}{dy} + (m - p - 1) x^i \varphi_{p-i+1}(x, y)\right] z^{m-p-2} \\
& + z^{m-p-1}\left[\beta x^i \frac{d\varphi_{p-i+1}}{dy} + \gamma(m - p) x^j \varphi_{p-j}(x, y)\right] + \ldots \\
& + z^{m-p+k+2}\left[\beta x \frac{d\varphi_{p-k+1}}{dy}\right. \\
& \qquad \left. + \gamma(m - p + k - 1) x^{i_1-1}(x - \lambda y)\varphi_{p-k-i_1+1}(x, y)\right]
\end{aligned}
$$

$$+ z^{m-p+k-1}\left[\beta x^{i_1-1}(x-\lambda y)\frac{d\varphi_{p-k-i_1+1}}{dy}\right.$$
$$\left.+\gamma(m-p+k)x^{i_2-1}(x-\lambda y)\varphi_{p-k-i_2}(x,y)\right]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ z^{m-4}\left[\beta x^{i_h-1}(x-\lambda y)\frac{d\varphi_{4-i_h}}{dy}\right.$$
$$\left.+\gamma(m-2)x(x-\lambda y)(\mathrm{A}x+\mathrm{B}y)\right]$$
$$+ z^{m-3}[\beta\mathrm{B}+\gamma(m-2)]\,x(x-\lambda y),$$

en y supposant $\lambda$ nul.

Mais les deux courbes $C_1$ et $P'_1$ ont un point double commun, et les deux tangentes communes $x=0$, $x-\lambda y=0$. La première tangente $x=0$ a, avec la courbe $C_1$, un contact effectif de l'ordre $p$, et, avec la courbe $P'_1$, un contact effectif de l'ordre $(p-1)$; la deuxième tangente $x-\lambda y=0$ a, avec la courbe $C_1$, un contact effectif de l'ordre $(p-k)$, car elle la rencontre en $(p-k+2)$ points coïncidents, et, avec la courbe $P'_1$, un contact effectif de l'ordre $(p-k-1)$, car elle la rencontre en $(p-k+1)$ points coïncidents. Ainsi, dans le cas actuel, $\mathrm{I}=p-1$, $\mathrm{J}=p-k-1$; donc les deux courbes $C_1$ et $P'_1$ ont $(4+\mathrm{I}+\mathrm{J})$ ou $(2p-k+2)$ points communs coïncidant avec l'origine O. J'ajouterai qu'il n'est pas possible de former les équations de deux courbes, telles que $C_1$ et $P'_1$, ayant un point double commun et même tangente, et possédant plus de $(2p-k+2)$ points communs coïncidant avec le point double, lorsqu'on impose en même temps à ces deux courbes la condition de donner, comme cas particulier, les courbes C et P'. Car la tangente $x=0$ a d'abord, avec les courbes $C_1$ et $P'_1$, le même contact respectif qu'avec les courbes C et P; quant à la tangente $x - \lambda y = 0$, elle ne peut pas avoir avec la courbe $C_1$ un contact d'ordre supérieur à $(p - k)$ ; car il faudrait pour cela introduire le facteur $(x - \lambda y)$ dans la fonction $\varphi_{p-k+1}(x, y)$ ; et alors, en supposant $\lambda = 0$, on trouverait $x^2$ comme facteur dans le terme en $z^{m-p+k-2}$, ce qui serait contraire aux hypothèses admises. On raisonnerait de même par la courbe $P'_1$.

Nous conclurons de là, en supposant $\lambda = 0$, que les deux courbes C et P′ ont $(2p - k + 2)$ points communs coïncidant avec le point O.

Ainsi, le nombre des tangentes, distinctes de $Oy$, qu'on peut mener à la courbe d'un point quelconque de $Oy$, est diminué de $(2p - k + 2)$ unités; et si, de ce dernier nombre, nous retranchons le nombre $(p - k + 2)$ des tangentes non effectives qui correspondent à un point quelconque du plan, il reste $p$, c'est-à-dire que, parmi les tangentes effectives qu'on peut mener à la courbe d'un point quelconque de l'axe $Oy$, il y en a $p$ qui coïncident avec la droite $Oy$. Donc la tangente de rebroussement est une tangente multiple de l'ordre $p$ de multiplicité. Il est visible d'ailleurs que l'ordre de multiplicité ne peut pas être supérieur à $p$, puisque cette tangente n'a, avec la courbe C, qu'un contact effectif de l'ordre $p$.

4. Une remarque analogue se présente lorsqu'on suppose la classe de la courbe invariable, c'est-à-dire lorsqu'on se donne l'*équation tangentielle* de la courbe. Dans ce cas, c'est l'ordre de la courbe qui se trouve diminué par la présence d'une tangente double.

Une tangente double ordinaire, c'est-à-dire une tangente double dont les deux points de contact sont distincts, diminue l'ordre de la courbe de *deux* unités, et de deux unités seulement.

Lorsque les deux points de contact coïncident, c'est-à-dire lorsque la tangente double est une tangente d'inflexion, on peut énoncer la proposition suivante :

« Si, parmi les tangentes qu'on peut mener du point » d'inflexion à la courbe, il y en a $(p+2)$ coïncidant » avec la tangente d'inflexion (alors le point d'inflexion » est en même temps un point de rebroussement d'or» dre $p$ pour la courbe C); si, en outre, parmi les tan» gentes qu'on peut mener du point d'inflexion de C à la » *première polaire d'une droite quelconque*, il y en » a $(p-k+1)$ coïncidant avec la tangente d'inflexion » (alors le point considéré est un point de rebroussement » d'ordre $(p-k)$ et non d'inflexion pour cette pre» mière polaire), l'ordre de la courbe sera diminué de

$(p-k+2)$ unités;

» le nombre entier $k$ peut varier depuis zéro jusqu'à » $(p-1)$. »

Pour établir les diverses parties de cette proposition, il suffira d'interpréter les calculs précédents dans le système des équations tangentielles ; et nous considérerons $x$, $y$, $z$ comme les distances d'une tangente quelconque de la courbe C aux trois sommets d'un triangle $abc$. Dans ce système, l'équation

$$\alpha \frac{dC}{dx} + \beta \frac{dC}{dy} + \gamma \frac{dC}{dz} = 0$$

représente la première polaire d'une droite quelconque $(\alpha, \beta, \gamma)$ du plan.

Cette interprétation repose sur le théorème suivant, analogue à celui que j'ai démontré dans la théorie des surfaces polaires d'un plan, et que je ne ferai qu'énoncer :

« Le nombre des points de rencontre d'une droite » $(\alpha, \beta, \gamma)$ avec une courbe, donnée par son équation tan-

» gentielle, est égal au nombre des tangentes communes
» à la courbe et à la première polaire de la droite; ces
» tangentes touchent la courbe aux points où elle est
» rencontrée par la droite considérée. »

Ceci posé, nous voyons, par l'équation (1), que le sommet $a$ du triangle $abc$ appartient à la courbe C ; que la droite $ab$ $(x = 0, y = 0)$ est une tangente double dont les deux points de contact coïncident, c'est-à-dire une tangente d'inflexion ; et enfin que, par le point $a$, passent $(p + 2)$ tangentes coïncidant avec la droite $ab$.

L'équation (2) nous montre que le point $a$ appartient aussi à la première polaire de la droite quelconque $(\alpha, \beta, \gamma)$ ; que la droite $ab$ est une tangente simple, et enfin que par le point $a$ passent $(p - k + 1)$ tangentes à la première polaire coïncidant avec la droite $ab$.

Or, les deux équations (1) et (2) ont en commun $(p - k + 2)$ solutions nulles $(x = 0, y = 0)$; on peut se rendre compte de ce fait en se plaçant de nouveau dans le système des *coordonnées-point*.

Donc la courbe C et la première polaire P d'une droite quelconque ont $(p - k + 2)$ tangentes communes coïncidant avec la droite $ab$. Par conséquent, le point où la droite quelconque $(\alpha, \beta, \gamma)$ rencontre la ligne $ab$ équivaut à $(p - k + 2)$ points d'intersection de cette droite avec la courbe C; mais ces points, quoique satisfaisant aux conditions analytiques qui expriment qu'un point appartient à une courbe, ne sont pas, à proprement parler, des points de la courbe C.

Donc, *l'ordre de la seconde courbe* C *est diminué de* $(p - k + 2)$ *unités*.

Je remarquerai, en outre, que le point $a$ est un point de rebroussement d'ordre $p$ pour la courbe C.

En effet, l'équation (3) est la première polaire d'une droite quelconque $(O, \beta, \gamma)$ passant par le point $a$; et comme, d'après la discussion du n° 3, les équations (1) et (3) ont en commun $(2p - k + 2)$ solutions nulles $(x = 0, y = 0)$, il en résulte que cette droite rencontre la courbe C en $(2p - k + 2)$ points coïncidant avec le point $a$. Mais, si de $(2p - k + 2)$ on retranche $(p - k + 2)$ (nombre des points improprement dits de la courbe auquel équivaut chaque point de la droite $ab$), il reste $p$; $p$ est donc le nombre des points effectifs de la courbe coïncidant avec le point $a$. Ainsi, une droite quelconque passant par le point $a$ y rencontre la courbe en $p$ points effectifs coïncidents; d'ailleurs, la tangente est unique; le point $a$ est donc un point de rebroussement d'ordre $p$ pour la courbe C; il est en même temps un point d'inflexion.

Le même raisonnement, appliqué à la courbe P, nous montre que le point $a$ est, pour la première polaire P, un point de rebroussement d'ordre $(p - k)$; mais il n'est plus, pour la courbe P, un point d'inflexion, car la droite $ab$ est alors une tangente simple.