NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GEORGES DOSTOR

Expressions générales du rayon et de la surface des polygones circonscriptibles

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 73-76

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__73_1>

EXPRESSIONS GÉNÉRALES DU RAYON ET DE LA SURFACE DES POLYGONES CIRCONSCRIPTIBLES;

PAR M. GEORGES DOSTOR,
Docteur ès Sciences mathématiques,
Professeur au lycée impérial de l'île de la Réunion.

1. La question que nous nous proposons de résoudre est la suivante :

Un polygone de n côtés est circonscrit à un cercle; on connaît les tangentes α, β, γ, δ, ε,... menées des différents sommets du polygone à la circonférence : calculer, en valeur de ces tangentes, le rayon du cercle et la surface du polygone.

2. Désignons par $2A$, $2B$, $2C$,... les angles du polygone respectivement compris sous les tangentes (α, α), (β, β), (γ, γ), ..., nous avons l'égalité

$$A + B + C + \ldots = (n-2)\frac{\pi}{2}.$$

On sait que si n est pair,

$$\cot(A + B + C + \ldots) = \pm \frac{1 - c_2 + c_4 - \ldots}{c_1 - c_3 + c_5 - \ldots},$$

et si n est impair,

$$\cot(A + B + C + \ldots) = \pm \frac{c_1 - c_3 + c_5 - \ldots}{1 - c_2 + c_4 - \ldots},$$

où c_1 désigne la somme des cotangentes, c_2 la somme des produits de ces cotangentes deux à deux, et ainsi de suite.

Or, lorsque n est pair, $(n - 2)\frac{\pi}{2}$ exprime un nombre pair d'angles droits, et l'on a

$$\cot(A + B + C + \ldots) = \infty,$$

ce qui exige que

$$c_1 - c_3 + c_5 - \ldots = 0;$$

et lorsque n est impair, $(n - 2)\frac{\pi}{2}$ représente un nombre impair d'angles droits, et il vient

$$\cot(A + B + C + \ldots) = 0,$$

ce qui donne la même relation. *On a* donc, *pour les angles d'un polygone fermé quelconque, convexe, à angles rentrants ou étoilé, la formule générale*

$$(\mathrm{I}) \qquad c_1 - c_3 + c_5 - c_7 + \ldots = 0.$$

3. *Rayon du cercle inscrit.* — Représentons ce rayon par R; nous avons

$$\cot A = \frac{\alpha}{R}, \quad \cot B = \frac{\beta}{R}, \quad \cot C = \frac{\gamma}{R}, \ldots.$$

Si nous substituons ces valeurs dans la formule (I), nous aurons l'équation

$$\frac{S_1}{R} - \frac{S_3}{R^3} + \frac{S_5}{R^5} - \frac{S_7}{R^7} + \ldots = 0,$$

où nous désignons par S_1 la somme des quantités α, β, γ, δ, ε,...; par S_3 la somme de leurs produits trois à trois, etc.

Deux cas sont à considérer ici :

1° Si n est impair, le dernier terme sera $\frac{S_n}{R^n}$, et l'équation pourra s'écrire

$$\text{(II)} \qquad S_1 R^{n-1} - S_3 R^{n-3} + S_5 R^{n-5} - \ldots = 0.$$

2° Si n est pair, le dernier terme sera $\frac{S_{n-1}}{R^{n-1}}$ et l'équation se réduira à

$$\text{(III)} \qquad S_1 R^{n-2} - S_3 R^{n-4} + S_5 R^{n-6} - \ldots = 0.$$

Telles sont les deux premières relations que nous nous proposons d'établir.

4. Remarque. — Lorsqu'on permute entre eux les segments tangentiels α, β, γ, δ, ..., les coefficients S_1, S_3, S_5, ... ne changent pas; les équations (II) et (III) donnent donc toujours les mêmes valeurs pour R. Donc :

Lorsqu'un polygone est circonscriptible à un cercle, quel que soit l'ordre dans lequel on dispose la suite des segments tangentiels des côtés, le nouveau polygone sera encore circonscriptible au même cercle.

5. Applications. — 1° *Triangle :*

$$\text{(1)} \qquad R^2 = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

2° *Quadrilatère :*

$$\text{(2)} \qquad R^2 = \frac{\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}.$$

6. *Surface du polygone.* — En appelant Q l'aire du polygone circonscriptible, nous avons

$$Q = (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots) R = S_1 R,$$

d'où

$$R = \frac{Q}{S_1}.$$

Substituons cette valeur dans les deux équations (II) et (III) et effectuons : nous obtenons les nouvelles équations

$$\text{(IV)} \quad Q^{n-1} - S_1 S_3 Q^{n-3} + S_1^3 S_5 Q^{n-5} - \ldots = 0 \quad \text{pour } n \text{ impair,}$$

$$\text{(V)} \quad Q^{n-2} - S_1 S_3 Q^{n-4} + S_1^3 S_5 Q^{n-6} - \ldots = 0 \quad \text{pour } n \text{ pair,}$$

qui donnent l'aire du polygone en fonction des quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$

7. Remarque. — *L'aire est constante, quel que soit l'ordre de succession des segments tangentiels* $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots$

8. Applications. — 1° *Triangle :*

$$(5) \qquad Q = \sqrt{(\alpha + \beta + \gamma)\alpha\beta\gamma}.$$

2° *Quadrilatère :*

$$(6) \qquad Q = \sqrt{(\alpha + \beta + \gamma + \delta)(\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta)}.$$