Nouvelles annales de mathématiques

Max Cornu

E. Morange

Théorème sur les coniques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 559-560

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__559_1>

THÉORÈME SUR LES CONIQUES;

PAR MM. MAX CORNU ET E. MORANGE.

On sait que lorsque trois coniques S, S′, S″ ont deux points communs A et B, les trois droites qui joignent les autres points d'intersection de ces courbes deux à deux concourent en un même point P. Je dis qu'il existe une conique passant par les deux points A et B, tangente en chacun de ces points aux deux droites PA et PB, et coupant une quelconque S des coniques en ses points d'intersection avec la polaire de P par rapport à S.

Je prends le triangle PAB pour triangle de référence.

(*) La proposition énoncée se déduit immédiatement du théorème de Carnot, quelle que soit la conique considérée. Car, d'après ce théorème, on a, pour toute courbe du second degré,

$$\frac{AC''.CB''.BA''}{AB''.CA''.BC''}=\frac{AB'.CA'.BC'}{CB'.AC'.BA'}.$$

G.

Les équations des trois coniques seront de la forme

$$(S) \qquad YZ + X(lX + m\,Y + n\,Z) = 0,$$

$$(S') \qquad YZ + X(lX + m'\,Y + n'\,Z) = 0,$$

$$(S'') \qquad YZ + X(lX + m''Y + n''Z) = 0.$$

L'équation d'une conique tangente à PA en A, à PB en B, est

$$YZ + \lambda X^2 = 0.$$

Cherchons la seconde corde commune à cette courbe et à la conique S : elle aura pour équation

$$(l - \lambda)X + mY + nZ = 0.$$

L'équation de la polaire de P par rapport à la conique S est

$$2lX + mY + nZ = 0.$$

On voit qu'on peut choisir λ de manière à identifier les équations de ces deux droites; il suffit de prendre $\lambda = -l$. Le théorème se trouve donc établi.