NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H.-G. ZEUTHEN

Nouvelle méthode pour déterminer les caractéristiques des systèmes de coniques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 529-540

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__529_0>

NOUVELLE MÉTHODE POUR DÉTERMINER LES CARACTÉRISTIQUES DES SYSTÈMES DE CONIQUES

(suite et fin; voir page 492);

PAR M. H.-G. ZEUTHEN (DE COPENHAGUE).

XIII. — *Détermination des caractéristiques d'un système de coniques qui ont un contact du quatrième ordre avec une courbe donnée.*

63. A ce système, dont la notation est $[(C_{m,n})^4]$, appartient toute conique infiniment aplatie :

1° renfermée dans une tangente d'inflexion de $C_{m,n}$ et limitée par deux points qui coïncident au point d'inflexion;

2° renfermée dans une tangente de rebroussement de $C_{m,n}$ et limitée par deux points qui coïncident au point de rebroussement.

On trouve donc

$$\lambda = x.t' + y.d',$$

où x et y sont des coefficients inconnus. Puis le principe de dualité donne

$$\varpi = x.d' + y.t'.$$

Les coniques irrégulières qui entrent dans le nombre ϖ sont les mêmes que celles qui entrent dans λ; mais les coefficients sont permutés. On voit donc que $x = 0$ amènerait $y = 0$, et réciproquement (*voir* la note première du n° 55). Du reste ils sont des nombres entiers et ne peuvent être négatifs.

On trouve maintenant

$$\mu = \frac{1}{3}(2x + y)t' + \frac{1}{3}(x + 2y)d',$$

$$\nu = \frac{1}{3}(x + 2y)t' + \frac{1}{3}(2x + y)d'.$$

64. Pour déterminer x et y nous appliquerons le lemme du n° 31 au système $[(M)^3, C_{m_1,n_1}]$ où nous remplacerons successivement la courbe C_{m_1,n_1} par un point ou par une droite. On aura (notations du n° 31)

$$\begin{aligned} r &= 3, \quad q = 2m - 4, \\ \alpha &= N[(M)^3\theta, C_{m_1,n_1}), \\ \beta &= N[(M)^3 - p, C_{m_1,n_1}], \end{aligned}$$

ou, par la formule (II) du n° 62,

$$\beta = N[(M)^3, p, C_{m_1,n_1}] - 4N[(M)^3\theta, C_{m_1,n_1}],$$

Par conséquent

$$q\alpha + \beta = (2m - 8)N[(M)^3\theta, C_{m_1,n_1}] + N[(M)^3, p, C_{m_1,n_1}].$$

Supposons d'abord que $C_{m,n}$ soit un point p_1 par lequel les coniques doivent passer.

Alors on sait [n° 62 et formules (21)] que

$$\begin{aligned} N[(C_{m,n})^3\theta, p_1] &= 1, \\ N[(C_{m,n})^3, p, p_1] &= 6n - 4m + 3d'. \end{aligned}$$

Pour la courbe M on doit substituer $n = 2(m - 1)$, $d' = 0$, et l'on trouve

$$q\alpha' + \beta' = 10(m - 2),$$

où α' et β' représentent ce que deviennent α et β dans ce cas-ci. Or, pour aucune conique infiniment aplatie du système $[(M)^3, p_1]$ le point de contact ne coïncide avec un point d'intersection. Par conséquent (n° 31)

$$q\alpha' + \beta' = \mathrm{N}[(\mathrm{M})^4, p_1).$$

On trouve la valeur de $\mathrm{N}[(\mathrm{M})^4, p_1]$ en substituant dans l'expression trouvée pour p (n° 63)

$$t' = 3(m-2), \quad d' = 0.$$

Par conséquent

$$q\alpha' + \beta' = (2x + y)(m-2).$$

Les deux expressions de $q\alpha' + \beta'$ devront être identiques, on a

$$2x + y = 10.$$

Soit ensuite C_{m_1, n_1} une droite l. Alors [n° 62, formules (21)]

$$\mathrm{N}[(C_{m,n})^3\theta, l) = 1$$
$$\mathrm{N}[(C_{m,n})^3, p, l) = 2(5n - 4m + 3d').$$

Pour la courbe M on doit substituer $n = 2(m-1)$, $d' = 0$. En désignant par α'' et β'' ce que deviennent dans ce cas particulier α et β, on trouve

$$q\alpha'' + \beta'' = 14(m-2).$$

$q\alpha'' + \beta''$ comprend :

1° Le nombre $\mathrm{N}[(\mathrm{M})^4, l]$ des coniques qui ont un contact du quatrième d'ordre avec M et qui touchent l.

2° $z.t'$, ou le nombre des coniques infiniment aplaties renfermées dans les tangentes d'inflexion de M, limitées aux points d'inflexion, et à la droite l, multiplié par un coefficient z; car ces coniques singulières appartiennent au système, et, dans les points d'inflexion coïncident, outre les quatre points communs qui forment le contact du troisième ordre, encore deux points d'intersection, sans que le contact s'élève à un ordre supérieur.

On voit que le coefficient z qui est entier est égal ou supérieur à 2. Si M avait des points de rebroussement, on devrait encore avoir égard à d'autres coniques singulières. Maintenant on trouve

$$q\alpha'' + \beta'' = \mathrm{N}\,[(\mathrm{M})^4,\, l) + z.t',$$

où $\mathrm{N}\,[(\mathrm{M})^4, l)$ s'obtient par la substitution de

$$t' = 3\,(m-2), \quad d' = 0.$$

dans l'expression trouvée pour ν (n° 63), et où t' qui appartient à la courbe M est aussi égal à $3\,(m-2)$. Par conséquent

$$q\alpha'' + \beta'' = (x + 2y + 3z)\,(m-2).$$

Les deux expressions de $q\alpha'' + \beta''$ devant être identiques, on a

$$x + 2y + 3z = 14.$$

65. Les équations (I) et (II) du n° 64 n'admettent, à cause des limites posées dans les n^{os} 63 et 64, que la solution suivante :

$$z = 2, \quad x = 4, \quad y = 2.$$

On trouve en substituant ces valeurs,

$$\mu = \frac{2}{3}\,(5t' + 4d'), \quad \nu = \frac{2}{3}\,(4t' + 5d'),$$

ou si l'on préfère des expressions entières,

$$(23a)\,(^*)\ \begin{cases} \mu = 2[5(n-m) + 3d'] = 2\,[4\,(m-n) + 3t'], \\ \nu = 2[4(n-m) + 3d'\,] = 2\,[5(m-n) + 3t'], \end{cases}$$

$$(23b) \qquad [(\mathrm{C}_{m,n})^4] \equiv (\mu, \nu).$$

(*) On voit que $\mu - \nu = 2\,(n - m)$.

Pour une courbe générale de l'ordre m, on trouve

$$(23c)\qquad \left\{\begin{aligned} \mu &= 10m(m-2), \\ \nu &= 8m(m-2). \end{aligned}\right.$$

66. Les valeurs $x = 4$, $y = 2$ donnent le théorème suivant :

Pour un système de coniques qui ont un contact du quatrième ordre avec une courbe donnée, on doit compter :

Quatre fois *dans* λ *et* deux fois *dans* ϖ, *toute conique infiniment aplatie renfermée dans une tangente d'inflexion de la courbe, et limitée à deux points qui coïncident au point d'inflexion;*

Deux fois *dans* λ *et* quatre fois *dans* ϖ, *toute conique ayant un point double* en *un point de rebroussement de la courbe et composée de deux droites qui coïncident* avec *la tangente de rebroussement* (*).

(*) La méthode dont nous avons fait usage ne servant qu'à déterminer des caractéristiques, elle n'est pas applicable si l'on veut trouver le nombre de coniques qui satisfont à cinq conditions dont aucune n'est indépendante des autres. Cette lacune a été remplie par M. Cayley, qui m'a fait l'honneur de me communiquer les résultats qui suivent ici avec la permission de leur auteur. Le savant distingué d'Angleterre désigne par (5), (4,1), (3,2), (3,1,1), (2,2,1), (2,1,1,1) et (1,1,1,1,1) les nombres respectifs des coniques qui ont avec une courbe donnée un contact de l'ordre 5 ou deux contacts des ordres 4 et 1,..., ou enfin cinq contacts de l'ordre 1, et par α le nombre $3n + d'$ $(= 3m + t')$ qu'il introduit pour faire ses formules symétriques. Alors

$$\begin{aligned}
(5) &= -15m - 15n + 9\alpha, \\
(4,1) &= -8m^2 - 20mn - 8n^2 + 104m + 104n + \alpha(6m + 6n - 66) \\
(3,2) &= 120m + 120n + \alpha(-4m - 4n - 78) + 3\alpha^2, \\
(3,1,1) &= -\frac{3}{2}m^3 - 10m^2n - 10mn^2, -\frac{3}{2}n^3 + \frac{109}{2}m^2 + 116mn \\
&\quad + \frac{109}{2}n^2 - 434m - 434n \\
&\quad + \alpha\left(\frac{3}{2}m^2 + 6mn + \frac{3}{2}n^2 - \frac{69}{2}m - \frac{69}{2}n + 291\right) - 3\alpha^2,
\end{aligned}$$

XIV. — *Applications.*

67. *Développée d'une courbe géométrique.* — Les formules données sont utiles pour déterminer les nombres

---

$$
\begin{aligned}
(2,2,1) = {} & 24m^2 + 54mn + 24n^2 - 468m - 468n \\
& + \alpha(-8m - 8n + 327) + \alpha^2\left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n - 12\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2,1,1,1) = {} & 6m^3 + 30m^2n + 30mn^2 + 6n^3 - 174m^2 - 348mn - 174n^2 \\
& + 1320m + 1320n \\
& + \alpha\left(\frac{1}{6}m^3 + m^2n + mn^2 + \frac{1}{6}n^3 - \frac{15}{2}m^2 - 26mn - \frac{15}{2}n^2\right. \\
& \qquad \left. + \frac{358}{3}m + \frac{358}{3}n - 960\right) \\
& + \alpha^2\left(-\frac{3}{2}m - \frac{3}{2}n + 28\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1,1,1,1,1) = {} & \frac{1}{120}m^5 + \frac{1}{12}m^4n + \frac{1}{3}m^3n^2 + \frac{1}{3}m^2n^3 + \frac{1}{12}mn^4 + \frac{1}{120}n^5 \\
& - \frac{1}{12}m^4 - \frac{5}{6}m^3n - 2m^2n^2 - \frac{5}{6}mn^3 - \frac{1}{12}n^4 \\
& - \frac{113}{24}m^3 - \frac{209}{12}m^2n - \frac{209}{12}mn^2 - \frac{113}{24}n^3 \\
& + \frac{1267}{12}m^2 + \frac{593}{3}mn + \frac{1267}{12}n^2 \\
& - \frac{3259}{5}m - \frac{3259}{5}n \\
& + \alpha\left(-\frac{1}{4}m^3 - \frac{3}{2}m^2n - \frac{3}{2}mn^2 - \frac{1}{4}n^3 + \frac{29}{4}m^2 + 23mn\right. \\
& \qquad \left. + \frac{29}{4}n^2 - \frac{337}{4}m - \frac{337}{4}n + \frac{195}{2}\right) \\
& + \alpha^2\left(\frac{9}{8}m + \frac{9}{8}n - 15\right).
\end{aligned}
$$

Dejà, en 1864, M. Cayley a donne le nombre (5) pour le cas d'une courbe generale de l'ordre m (*Philosophical Transactions*, t. CLV, p. 545; 1865). Quant à l'introduction d'une seule notation pour $3n + d'$, je regrette de ne l'avoir pas employée dans mes formules, où elle permettrait de garder la symetrie en même temps que les expressions contiendraient toujours les mêmes trois nombres donnés, m, n et α

m_1, n_1, d_1, d'_1, t_1, t'_1 correspondant à la développée d'une courbe donnée $C_{m,n}$. On y emploie les propriétés suivantes de la développée :

1° D'être l'enveloppe des normales de la courbe donnée;

2° D'être le lieu des centres des cercles qui ont avec $C_{m,n}$ un contact du second ordre;

3° De n'avoir pour tangentes d'inflexion que les normales aux points de rebroussement du second ordre de $C_{m,n}$. Excepté le cas très-singulier où $C_{m,n}$ est doué de ces points, on a tout de suite $t'_1 = 0$.

68. Le nombre des normales à $C_{m,n}$ qui passent par un point donné, est égal à celui des cercles dont le centre est en ce point et qui touchent $C_{m,n}$. Or la condition d'être un cercle à centre donné peut être remplacée par celle de toucher deux droites (imaginaires) en des points donnés. Donc

$$n_1 = \mathrm{N}(l_1 d_1,\ l_2 d_2,\ C_{m,n}),$$

ou, selon la formule (II) du n° 23 (aucune conique ne pouvant toucher et couper la même droite),

$$n_1 = \frac{1}{2}\mathrm{N}(l_1\theta_1,\ l_2,\ p_2,\ C_{m,n}) = \frac{1}{4}\mathrm{N}(l_1,\ p_1,\ l_2,\ p_2,\ C_{m,n}),$$

ou d'après la formule (3),

$$n_1 = m + n.$$

69. La développée étant le lieu des centres d'un système de cercles, ou le lieu des pôles de la droite à l'infini par rapport à un système de coniques qui passent par deux points de cette droite, son ordre m_1 s'exprime par $\frac{\nu}{2}$, où ν est la seconde caractéristique de ce système (*).

(*) Voir *Comptes rendus* du 15 février 1864, le théorème II.

Ce système est de la forme $[(C_{m,n})^2, p_1, p_2)$. Par conséquent, formules (11)],

$$m_1 = 3m + t' = 3n + d'.$$

70. Puis les formules de M. Plücker donnent :

$$(26) \quad d'_1 = 3(2m - n + t') = 3(2n - m + d'),$$

$$(27) \quad \begin{cases} t_1 = \frac{1}{2}(m+n)^2 - \frac{1}{2}(4m + n + t') \\ \quad = \frac{1}{2}(m+n)^2 - \frac{1}{2}(m + 4n + d'), \end{cases}$$

$$(28) \quad \begin{cases} d_1 = \frac{1}{2}(3m + t')^2 - 5(3m + t') + 4(m + n) \\ \quad = \frac{1}{2}(3n + d')^2 - 5(3n + d') + 4(m + n). \end{cases}$$

Un point de rebroussement de la développée est en général le *centre d'un cercle qui a avec $C_{m,n}$ un contact du troisième ordre*. Le nombre de ces cercles est

$$N[(C_{m,n})^3, p_1, p_2] = 5m - 3n + 3t' = d'_1 - m;$$

selon les formules (21). Les m autres points de rebroussement sont à l'infini et correspondent aux m points de $C_{m,n}$ à l'infini. La tangente à la développée en l'un de ces points est la droite à l'infini elle-même. Donc il y a aussi $\frac{m(m-1)}{2}$ tangentes doubles à l'infini. Il y en aura encore

$$t_1 - \frac{m(m-1)}{2} = \frac{1}{2}(2mn + n^2 - 4n - d').$$

Celles-ci seront deux fois normales à $C_{m,n}$.

d_1 est le nombre des points qui sont des centres de courbure correspondant à deux points de $C_{m,n}$.

Du reste ces résultats sont bien connus, mais trouvés par d'autres considérations.

71. Nous y ajouterons quelques théorèmes qui appartiennent à la même théorie :

Le lieu des points d'où on peut mener deux normales égales à une courbe $C_{m,n}$, *est de l'ordre*

$$m(m+2n-5)+t;$$

car cet ordre sera la moitié de la caractéristique ν d'un système $(2C_{m,n}, p_1, p_2)$ ou, selon les formules (4), de $2m(m+2n-5)+2t$.

Il y a, dans le plan,

$$\frac{1}{3}(2m^3+6m^2n-n^3-30m^2-18mn+13n^2+84m-42n)$$
$$+\frac{1}{3}(6m+3n-26)t$$

points d'où l'on peut mener à une courbe $C_{m,n}$ *trois normales égales;* car ce nombre est celui que nous avons désigné par $N(3C_{m,n}, p_1, p_2)$, et qui a, selon les formules (6), la valeur que nous venons d'indiquer.

Il y a sur la développée de $C_{m,n}$

$$3(2mn+n^2+4m-10n)+(2m+n-14)d'$$

points d'où l'on peut mener à $C_{m,n}$ *une normale égale au rayon de courbure de* $C_{m,n}$ *qui y touche la développée;* car ce nombre est celui que nous avons désigné par $N[(C_{m,n})^2, C_{m,n}, p_1, p_2]$ dans les formules (13).

72. *Courbe caustique par réflexion.* — Nous donnerons encore un exemple de l'application de la théorie des caractéristiques en discutant la courbe enveloppe des rayons émanés d'un point dans le plan d'une courbe $C_{m,n}$ et réfléchis par celle-ci. Nous désignerons par m_2, n_2, d_2, d'_2, t_2, t'_2 les nombres m, n, d, d', t, t' qui y correspondent et que nous aurons à chercher. A cette recherche les propositions suivantes seront utiles :

1° Une conique ayant pour foyer le point f d'où partent les rayons et tangente à $C_{m,n}$ au point θ, le rayon réfléchi par $C_{m,n}$ au point θ passera par l'autre foyer de la conique;

2° Un système de coniques ayant un foyer commun au point f d'où partent les rayons et un contact du second ordre avec $C_{m,n}$, la courbe cherchée sera le lieu de l'autre foyer;

3° Si le contact s'élève au troisième ordre, le second foyer sera un point de rebroussement de la courbe cherchée.

Il faut encore se rappeler que la condition d'avoir un point donné pour foyer équivaut à deux tangentes données.

73. Selon la première proposition du n° 72, la classe n_2 de la courbe cherchée s'exprime par le nombre des coniques qui ont pour foyers le point f et un point quelconque donné, et qui touchent $C_{m,n}$; par conséquent [*voir* les formules (3)]

$$n_2 = \mathrm{N}(C_{m,n}, l_1, l_2, l_3, l_4) = m + 2n.$$

D'après la deuxième proposition du n° 72, la courbe cherchée est le lieu du foyer non donné d'un système dont on connaît l'autre foyer. Ce lieu est semblable à celui du centre : son ordre s'exprime donc par la caractéristique ν de ce système (*), qui sera de la forme $[(C_{m,n})^2, l_1, l_2]$. Par conséquent [*voir* les formules (11)]

$$m_2 = 3m + t' = 3n + d'.$$

Enfin, par la troisième proposition du n° 72,

$$d'_2 = \mathrm{N}[(C_{m,n})^3, l_1, l_2],$$

(*) *Comptes rendus* du 15 février 1864, théorème I.

ou, selon les formules (21),

$$d'_2 = 6m - 4n + 3t' = 5n - 3m + 3d'.$$

74. Puis les formules de M. Plücker donnent

$$t'_2 = 2n,$$

$$d_2 = \frac{1}{2}(3m + t')^2 - 11m + 5n - 5t'$$

$$= \frac{1}{2}(3n + d')^2 + 4m - 10n - 5d',$$

$$t_2 = \frac{1}{2}[(m + 2n)^2 - (m + 11n + d')]$$

$$= \frac{1}{2}[(m + 2n)^2 - (4m + 8n + t')].$$

En général, notre courbe caustique n'a pas d'inflexions réelles. Les $2n$ tangentes d'inflexion sont donc imaginaires, et l'on peut prouver qu'elles sont les tangentes menées à $C_{m,n}$ par les deux points à l'infini sur un cercle, et que les points d'inflexion sont aux points de contact avec $C_{m,n}$.

t_2 représente le nombre de chemins par lesquels un rayon deux fois réfléchi par $C_{m,n}$ peut retourner au point d'où il part, si l'on n'a pas égard au sens dans lequel il parcourt ce chemin. En y ayant égard on doit remplacer le nombre t_2 par $2t_2$.

Note.

Les méthodes que nous avons employées pour la recherche des caractéristiques des systèmes de coniques planes s'appliquent avec peu de modifications aux caractéristiques des systèmes de surfaces du second ordre assujetties à huit conditions (*). On y fait usage des théo-

(*) *Voir* sur ces systèmes les publications de MM. Chasles et de Jonquières, dans les *Comptes rendus* (t. LXI, p. 396, et t. LVIII, p. 567), et la derniere de M. Chasles du 26 fevrier 1866.

rèmes suivants dont les deux premiers au moins sont connus (*Comptes rendus*, 4 sept. 1864), et dont le dernier se prouve sans difficulté.

Dans un système (μ, ν, ρ) *de surfaces du second ordre il y a :*

1° $2\rho - \nu$ *cônes ;*

2° $2\mu - \nu$ *coniques planes ;*

3° $2\nu - \mu - \rho$ *surfaces singulières composées de deux plans dont la ligne d'intersection est limitée à deux points* (sommets).

Un tableau contenant la déduction par ces moyens de la XVIII^e classe de résultats publiés par M. Chasles dans les *Comptes rendus* du 26 février, est sous presse pour être inséré dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Copenhague*, et il donne un exemple de l'application de ces théorèmes (*).