Nouvelles annales de mathématiques

Painvin

Théorie des surfaces polaires d'un plan

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 49-62

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__49_0>

THÉORIE DES SURFACES POLAIRES D'UN PLAN

(voir 2e série, t. IV, p. 413);

PAR M. PAINVIN.

Définition et propriétés principales des surfaces polaires d'un plan.

1. L'*ordre* d'une surface est égal au nombre des points en lesquels elle est rencontrée par une droite quelconque; l'ordre est égal au degré de l'*équation ponctuelle*.

La *classe* d'une surface est égale au nombre des plans tangents qu'on peut lui mener par une droite quelconque; la classe est égale au degré de l'*équation tangentielle*.

Soient une surface de $n^{\text{ième}}$ *classe et un plan fixe* P; *par une droite quelconque* D, *située dans ce plan, menons à la surface ses* n *plans tangents* $T_1, T_2, \ldots, T_n$; *j'appellerai* polaire $(n-p)^{\text{ième}}$ du plan P *l'enveloppe d'un plan* Q *passant par la droite* D *et tel, que*

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_p \left(\frac{1}{\operatorname{tang}\mathrm{PDQ}} - \frac{1}{\operatorname{tang}\mathrm{PDT}_1}\right)\left(\frac{1}{\operatorname{tang}\mathrm{PDQ}} - \frac{1}{\operatorname{tang}\mathrm{PDT}_2}\right)\cdots \\ &\qquad \times \left(\frac{1}{\operatorname{tang}\mathrm{PDQ}} - \frac{1}{\operatorname{tang}\mathrm{PDT}_p}\right) = 0, \end{aligned}\right.$$

la somme s'étendant à toutes les combinaisons p *à* p *des différences correspondant aux* n *angles dièdres* $\widehat{\mathrm{PDT}_1}$, $\widehat{\mathrm{PDT}_2}, \ldots, \widehat{\mathrm{PDT}_n}$.

L'ordre des lettres indique le sens de rotation des angles; on regardera ces angles comme positifs ou négatifs, suivant que la rotation ainsi indiquée a lieu dans un sens ou en sens contraire.

Cette relation peut aussi s'écrire

$$\text{(II)} \qquad \sum_p \frac{\sin \widehat{QDT_1}}{\sin \widehat{PDT_1}} \cdot \frac{\sin \widehat{QDT_2}}{\sin \widehat{PDT_2}} \cdots \frac{\sin \widehat{QDT_p}}{\sin \widehat{PDT_p}} = 0.$$

2. Pour déterminer les surfaces polaires d'un plan, je désignerai par (x_0, y_0, z_0, t_0) les coordonnées du plan P; par (x, y, z, t) celles du plan variable Q; et enfin par (x_i, y_i, z_i, t_i) celles du plan tangent T_i passant par l'intersection D des plans P et Q; nous aurons, d'après les formules (11) (1re partie),

$$\text{(1)} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_i = \dfrac{\lambda x_0 + \mu x}{\rho}, \quad y_i = \dfrac{\lambda y_0 + \mu y}{\rho}, \quad z_i = \dfrac{\lambda z_0 + \mu z}{\rho}, \\ t_i = \dfrac{\lambda t_0 + \mu t}{\rho}, \qquad \text{où} \quad \dfrac{\sin \widehat{QDT_i}}{\sin \widehat{T_i DP}} = \dfrac{\lambda}{\mu}. \end{array} \right.$$

Soit alors

$$\text{(2)} \qquad U(x, y, z, t) = 0$$

l'équation tangentielle de la surface; les solutions de cette équation donneront les coordonnées des plans tangents à la surface. Si, dans l'équation (2), nous remplaçons x_i, y_i, z_i, t_i par leurs valeurs (1), nous obtiendrons une équation en $\dfrac{\lambda}{\mu}$, dont les racines seront les rapports des sinus des angles des plans tangents T_i avec les plans $Q(x, y, z, t)$ et $P(x_0, y_0, z_0, t_0)$. En égalant à zéro le coefficient de $\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{n-p}$ ou de $\left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)^p$, nous exprimerons que la relation (II) est satisfaite, car ce coefficient sera, d'après ce qu'on vient de dire,

$$\sum_p \frac{\sin \widehat{QDT_1}}{\sin \widehat{T_1 DP}} \cdot \frac{\sin \widehat{QDT_2}}{\sin \widehat{T_2 DP}} \cdots \frac{\sin \widehat{QDT_p}}{\sin \widehat{T_p DP}}.$$

Nous aurons ainsi une relation entre les coordonnées (x, y, z, t) du plan Q; cette équation en représentera donc l'enveloppe et sera, d'après notre définition, l'*équation tangentielle de la polaire* $(n-p)^{\text{ieme}}$ *du plan* P.

L'équation (2) étant homogène, la substitution des valeurs (1) donne

$$(3)\qquad U(\lambda x_0 + \mu x,\ \lambda y_0 + \mu y,\ \lambda z_0 + \mu z,\ \lambda t_0 + \mu t) = 0.$$

La formule de Taylor

$$\begin{aligned} f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma, t+\delta) \\ = f(x,y,z,t) + \left(\alpha\frac{d.}{dx} + \beta\frac{d.}{dy} + \gamma\frac{d.}{dz} + \delta\frac{d.}{dt}\right) f + \ldots \\ + \frac{1}{1.2\ldots p}\left(\alpha\frac{d.}{dx} + \beta\frac{d.}{dy} + \gamma\frac{d.}{dz} + \delta\frac{d.}{dt}\right)^p f + \ldots \end{aligned}$$

appliquée à l'équation (3), en regardant $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ comme respectivement égaux à $\frac{\mu}{\lambda}x, \frac{\mu}{\lambda}y, \frac{\mu}{\lambda}z, \frac{\mu}{\lambda}t$, nous conduit à

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} & U_0 + \frac{\mu}{\lambda}\Delta_1 U_0 + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \Delta_2 U_0 + \ldots \\ & + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n-2}\Delta_2 U + \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n-1}\Delta_1 U + \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n U = 0, \end{aligned}\right.$$

après avoir adopté les notations symboliques

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta_p U_0 &= \left(x\frac{d.}{dx} + y\frac{d.}{dy} + z\frac{d.}{dz} + t\frac{d.}{dt}\right)^p U_0, \\ \Delta_p U &= \left(x_0\frac{d.}{dx} + y_0\frac{d.}{dy} + z_0\frac{d.}{dz} + t_0\frac{d}{dt}\right)^p U_0, \end{aligned}\right.$$

$$U = U(x, y, z, t),$$

$$U_0 = U(x_0, y_0, z_0, t_0).$$

4.

Car il est facile de se convaincre que

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\Delta_p \mathrm{U}_0 = \Delta_{n-p}\mathrm{U},\\
&\text{c'est-à-dire}\\
&\left(x\frac{d.}{dx} + y\frac{d.}{dy} + z\frac{d.}{dz} + t\frac{d.}{dt}\right)^p \mathrm{U}_0\\
&\quad = \left(x_0\frac{d.}{dx} + y_0\frac{d.}{dy} + z_0\frac{d.}{dz} + t_0\frac{d.}{dt}\right)^{n-p} \mathrm{U};
\end{aligned}
\right.
$$

il suffit pour cela de développer l'équation (3), en y considérant α, β, γ, δ comme respectivement égaux à $\frac{\lambda}{\mu}x_0$, $\frac{\lambda}{\mu}y_0$, $\frac{\lambda}{\mu}z_0$, $\frac{\lambda}{\mu}t_0$, et d'identifier le résultat obtenu avec le premier développement.

D'après cela, *la* $(n-p)^{\text{ième}}$ *polaire du plan* (x_0, y_0, z_0, t_0) *a pour équation*

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\Delta_p \mathrm{U}_0 = \left(x\frac{d.}{dx} + y\frac{d.}{dy} + z\frac{d.}{dz} + t\frac{d.}{dt}\right)^p \mathrm{U}_0 = 0,\\
&\text{ou}\\
&\Delta_{n-p}\mathrm{U} = \left(x_0\frac{d.}{dx} + y_0\frac{d.}{dy} + z_0\frac{d.}{dz} + t_0\frac{d.}{dt}\right)^{n-p} \mathrm{U} = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

ou bien *la* $p^{\text{ième}}$ *polaire du plan* (x_0, y_0, z_0, t_0) *a pour équation*

$$
(7\ bis)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\Delta_{n-p}\mathrm{U}_0 = \left(x\frac{d.}{dx} + y\frac{d.}{dy} + z\frac{d.}{dz} + t\frac{d.}{dt}\right)^{n-p} \mathrm{U}_0 = 0,\\
&\text{ou}\\
&\Delta_p\mathrm{U} = \left(x_0\frac{d.}{dx} + y_0\frac{d.}{dy} + z_0\frac{d.}{dz} + t_0\frac{d.}{dt}\right)^p \mathrm{U} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Nous conclurons de ce calcul que :

La $(n-p)^{\text{ième}}$ ***polaire d'un plan est de la*** $p^{\text{ième}}$ *classe*, *ou* ***la*** $p^{\text{ième}}$ ***polaire est de la*** $(n-p)^{\text{ième}}$ *classe*.

La $(n-1)^{\text{ième}}$ *polaire est un point :* je l'appellerai *point polaire du plan.*

3. On peut, dans la relation (II), remplacer les rapports des sinus par les rapports des distances correspondantes. Désignons par d_i et λ_i les distances d'un point du plan tangent T_i aux plans P et Q; cette relation deviendra

$$\sum \frac{\lambda_1}{d_1}\cdot\frac{\lambda_2}{d_2}\cdots\frac{\lambda_p}{d_p} = 0.$$

Mais si l'on suppose que le plan P s'éloigne à l'infini, les plans Q, $T_1, T_2, \ldots, T_n$, qui se coupent suivant une même droite située dans le plan P, deviendront parallèles; les distances d_i pouvant être regardées comme égales, la relation ci-dessus donnera

$$\text{(III)} \qquad \sum \lambda_1.\lambda_2\ldots\lambda_p = 0,$$

λ_i étant la distance du plan Q au plan parallèle T_i et cette somme s'étendant à toutes les combinaisons p à p des n distances $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Ceci posé, *imaginons qu'on mène à une surface de* $n^{ième}$ *classe tous ses plans tangents parallèles à un même plan quelconque; soit alors un plan* Q *parallèle à ces plans tangents et tel, que*

$$\sum \lambda_1.\lambda_2\ldots\lambda_p = 0,$$

quelle que soit la direction considérée; le point Q *enveloppera une certaine surface que j'appellerai* la $(n-p)^{ième}$ enveloppe diamétrale *de la surface primitive.*

On voit, par ce qui a été dit ci-dessus, que les enveloppes diamétrales sont les polaires du plan à l'infini.

Les coordonnées du plan à l'infini sont infinies; mais on voit facilement, par les formules de la première partie, que ces coordonnées sont entre elles comme les constantes m, n, p, q (1re partie, 1, 3, 4). Donc :

La $(n-p)^{\text{ième}}$ enveloppe diamétrale se déduira de la $(n-p)^{\text{ième}}$ polaire du plan (x_0, y_0, z_0, t_0), en y remplaçant ces coordonnées respectivement par les constantes m, n, p, q.

4. Avant de passer à l'étude des principales propriétés des polaires, je ferai quelques remarques sur les formes symboliques que j'ai employées. Et d'abord je prendrai la notation plus générale

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta_p^i \mathrm{U} &= \left(x_i \frac{d.}{dx} + y_i \frac{d.}{dy} + z_i \frac{d.}{dz} + t_i \frac{d.}{dt}\right)^p \mathrm{U}, \\ \Delta_{n-p} \mathrm{U}_i &= \left(x \frac{d.}{dx} + y \frac{d.}{dy} + z \frac{d.}{dz} + t \frac{d.}{dt}\right)^{n-p} \mathrm{U}_i, \end{aligned}\right.$$

qui donne, sous deux formes différentes, la $p^{\text{ième}}$ polaire du plan $\mathrm{P}_i\,(x_i, y_i, z_i, t_i)$.

Je vais démontrer les deux identités

$$\left\{\begin{aligned} &(9) \quad \Delta_q^j (\Delta_p^i \mathrm{U}) = \Delta_p^i (\Delta_q^j \mathrm{U}), \\ &(10) \quad \Delta_q^i (\Delta_p^i \mathrm{U}) = \Delta_{p+q}^i \mathrm{U}. \end{aligned}\right.$$

La première de ces relations rendue explicite donne

$$(1^\circ)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(x_j \frac{d.}{dx} + y_j \frac{d.}{dy} + \ldots\right)^q \underbrace{\left[\left(x_i \frac{d.}{dx} + \ldots\right)^p \mathrm{U}\right]}_{\mathrm{H}} \\ &= \left(x_i \frac{d.}{dx} + y_i \frac{d.}{dy} + \ldots\right)^p \underbrace{\left[\left(x_j \frac{d.}{dx} + \ldots\right)^q \mathrm{U}\right]}_{\mathrm{G}}. \end{aligned}\right.$$

Or le terme général de la fonction H est

$$\frac{p!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!}\, x_i^\alpha y_i^\beta z_i^\gamma t_i^\delta\, \frac{d^{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\mathrm{U}}{dx^\alpha\, dy^\beta\, dz^\gamma\, dt^\delta};$$

et, par suite, le terme général du premier membre de l'égalité (1°) sera

$$(2^\circ)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{p!\,q!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!\,\alpha_1!\,\beta_1!\,\gamma_1!\,\delta_1!}\,x_j^{\alpha_1}y_j^{\beta_1}z_j^{\gamma_1}t_j^{\delta_1}.x_i^{\alpha}y_i^{\beta}z_i^{\gamma}t_i^{\delta}\\ &\times\frac{d^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+\delta_1}\mathrm{U}}{dx^{\alpha+\alpha_1}dy^{\beta+\beta_1}dz^{\gamma+\gamma_1}dt^{\delta+\delta_1}}, \end{aligned}\right.$$

en admettant que les nombres entiers positifs α, α_1, etc., vérifient les relations

$$(3^\circ)\quad \left\{ \begin{aligned} \alpha+\beta+\gamma+\delta&=p,\\ \alpha_1+\beta_1+\gamma_1+\delta_1&=q. \end{aligned}\right.$$

En opérant de la même manière sur le second membre de l'égalité (1°), on retrouve la même expression pour le terme général. L'identité (9) est donc vraie. On démontrera l'identité (10) en introduisant l'hypothèse $j=i$ dans l'expression (2°), et en ayant égard à l'identité $(x+a)^p(x+a)^q=(x+a)^{p+q}$.

5. Théorème I. — *Si par une droite fixe* D *on mène les plans tangents à une surface donnée par son équation tangentielle, le produit continu des sinus des angles d'un plan quelconque* Q *passant par cette droite* D *avec les plans tangents est proportionnel au résultat de la substitution des coordonnées de ce plan dans le premier membre de l'équation de la surface.*

Ce théorème n'est que la traduction de l'égalité suivante, qui nous est fournie par l'équation (4),

$$\frac{\sin\widehat{\mathrm{QDT}_1}.\sin\widehat{\mathrm{QDT}_2}\ldots\sin\widehat{\mathrm{QDT}_n}}{\sin\widehat{\mathrm{PDT}_1}.\sin\widehat{\mathrm{PDT}_2}\ldots\sin\widehat{\mathrm{PDT}_n}}=\frac{\mathrm{U}(x,y,z,t)}{\mathrm{U}_0(x_0,y_0,z_0,t_0)}.$$

6. Théorème II. — *Le point polaire d'un plan est le centre harmonique par rapport au plan des points de*

contact des plans tangents issus d'une droite quelconque située dans ce plan; le centre harmonique reste donc invariable lorsque la droite se déplace dans le plan.

Soient T_1, T_2,..., T_n les points de contact des plans tangents T_1, T_2,..., T_n menés à la surface par une droite D située dans un plan fixe P; le *point polaire* du plan P est l'enveloppe des plans Q satisfaisant (I) à la relation

$$(1^\circ)\quad \frac{n}{\tang \widehat{QDP}} = \frac{1}{\tang \widehat{PDT_1}} + \frac{1}{\tang \widehat{PDT_2}} + \ldots + \frac{1}{\tang \widehat{PDT_n}}.$$

Or, je dis que le plan Q passe par le centre harmonique C, par rapport au plan P, des points T_1, T_2,..., T_n. Menons (*), en effet, par C un plan perpendiculaire à la droite D, et désignons par t_1, t_2,..., t_n les points d'intersection par ce plan auxiliaire du faisceau (MT_1, MT_2,..., MT_n), M étant un point quelconque du plan P; et soient (Ot_1, Ot_2,..., Ot_n, Op, Oq) les intersections par ce même plan auxiliaire des plans (DT_1, DT_2...., DT_n, DP, DQ). D'après la définition du centre harmonique d'un système de points dans l'espace, le point C sera le centre harmonique, par rapport à la droite Op, des points (t_1, t_2,..., t_n) situés dans le plan auxiliaire. Menons enfin par le point C une droite perpendiculaire à Op, et soient (p', q', t'_1, t'_2,..., t'_n) les intersections de cette perpendiculaire avec les droites (Op, Oq, Ot_1, Ot_2,..., Ot_n). D'après la définition du centre harmonique d'un système de points dans un plan, le point C sera le centre harmonique, par rapport au point p', des points (t'_1, t'_2,..., t'_n) situés en ligne droite avec p'; nous

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

aurons par conséquent

$$(2^{\circ}) \qquad \frac{n}{Cp'} = \frac{1}{p't'_1} + \frac{1}{p't'_2} + \ldots + \frac{1}{p't'_n}.$$

Mais si nous remarquons que

$$\operatorname{tang} \widehat{QDP} = \frac{q'p'}{Op'}, \quad \operatorname{tang} \widehat{PDT_1} = \frac{p't'_1}{Op'},$$

la relation (1°) nous donne

$$(3^{\circ}) \qquad \frac{n}{q'p'} = \frac{1}{p't'_1} + \frac{1}{p't'_2} + \ldots + \frac{1}{p't'_n}.$$

De la comparaison des égalités (2°) et (3°) résulte $p'C = p'q'$, c'est-à-dire que le point C coïncide avec le point q', ou enfin que le plan Q passe par le centre harmonique C, par rapport au plan P, des points de contact $T_1, T_2, \ldots, T_n$.

Or le plan Q est tangent au lieu des centres harmoniques. En effet, le point de contact d'un plan tangent est l'intersection de ce plan avec les plans tangents infiniment voisins; par suite, si nous considérons des faisceaux de plans tangents infiniment voisins du précédent, le point C restera le même, et les plans Q' correspondant à ces faisceaux se couperont au point C; donc le point C est le point de contact du plan Q. Ainsi les plans Q enveloppent le lieu des centres harmoniques des points de contact des plans tangents issus d'une droite quelconque du plan P; or, l'enveloppe des plans Q est un point, point polaire des plans P. Donc, etc.

Lorsqu'on suppose le plan P à l'infini, le centre harmonique devient le centre des moyennes distances, et nous avons ce théorème :

Si l'on mène à une surface de $n^{ième}$ classe tous *ses plans tangents parallèles à un même plan, leurs points de contact auront pour centre des moyennes distances un point fixe, quelle que soit la direction du plan considéré, et ce point fixe est le point polaire du plan à l'infini.*

Je donnerai à ce point le nom de *centre des moyennes distances* de la surface.

7. Théorème III. — *Si deux surfaces de $n^{ième}$ classe sont tangentes aux mêmes points à un même faisceau de n plans, le point polaire d'un plan quelconque passant par l'arête du faisceau sera le même pour les deux surfaces.*

Car le point polaire coïncide avec le centre harmonique, lequel est évidemment le même pour les deux surfaces.

Corollaire I. — *Si* P *est le plan considéré passant par l'arête du faisceau, et si, par une droite quelconque* D *située dans ce plan, on mène les plans tangents* $T_1, T_2, \ldots, T_n$ *à la première surface, puis les plans tangents* $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *à la seconde, on aura la relation*

$$\sum \frac{1}{\tan \widehat{PDT_i}} = \sum \frac{1}{\tan \widehat{PDt_i}}.$$

Le point polaire du plan P est en effet le même pour les deux surfaces; or, si Q est le plan passant par la droite D et le point polaire commun, on a (I)

$$\frac{n}{\tan \widehat{PDQ}} = \sum \frac{1}{\tan \widehat{PDT_i}}, \quad \frac{n}{\tan \widehat{PDQ}} = \sum \frac{1}{\tan \widehat{PDt_i}},$$

ce qui démontre la relation énoncée.

Corollaire II. — *Par une droite fixe* D, *menée dans* *un plan* P, *soient menés les n plans tangents* T_1, T_2,..., T_n *à une surface de* $n^{ième}$ *classe; maintenant, par une droite quelconque* D′ *située dans le même plan, conduisons les n plans tangents* $t_1, t_2, \ldots, t_n$*; puis, par cette même droite* D′ *et les points de contact des plans tangents* $T_1, T_2, \ldots, T_n$, *menons les n plans* $D'r_1$, $D'r_2$,..., $D'r_n$*; on aura la relation*

$$\sum \frac{1}{\operatorname{tang} \widehat{PD't_i}} = \sum \frac{1}{\operatorname{tang} \widehat{PD'r_i}}.$$

Nous pouvons en effet regarder les n points de contact des plans tangents primitifs comme une surface de $n^{ième}$ classe; et alors les plans tangents menés à cette surface par la droite D′ ne sont autres que les plans $D'r_1$, $D'r_2, \ldots, D'r_n$; le théorème énoncé n'est donc qu'un cas particulier du corollaire précédent.

Corollaire III. — *Lorsque deux surfaces de* $n^{ième}$ *classe sont tangentes aux mêmes points à un même faisceau de n plans parallèles, ces deux surfaces ont le même centre des moyennes distances.*

En effet, le théorème (III) est encore vrai lorsque la droite d'intersection des plans est à l'infini; et alors, le point polaire d'un plan quelconque P parallèle aux plans tangents communs sera le même pour les deux surfaces; or, lorsque le plan P est à l'infini, le point polaire est le centre des moyennes distances.

8. Théorème IV. — *L'enveloppe des plans dont les* $p^{ièmes}$ *polaires touchent un plan donné* P_0 *est la* $(n-p)^{ième}$ *polaire de ce plan.*

La $p^{ième}$ polaire d'un plan P_1 est

$$\Delta_p^1 U = \Delta_{n-p} U_1 = \left(x\frac{d.}{dx} + y\frac{d.}{dy} + z\frac{d.}{dz} + t\frac{d.}{dt}\right)^{n-p} U_1 = 0;$$

cette surface devant toucher le plan fixe P_0, on aura

$$\left(x_0 \frac{d.}{dx} + y_0 \frac{d.}{dy} + z_0 \frac{d.}{dz} + t_0 \frac{d.}{dt}\right)^{n-p} U_1 = 0;$$

ou, en regardant (x_1, y_1, z_1, t_1) comme des coordonnées courantes,

$$\left(x_0 \frac{d.}{dx} + y_0 \frac{d.}{dy} + z_0 \frac{d.}{dz} + t_0 \frac{d.}{dt}\right)^{n-p} U = 0;$$

c'est précisément la $(n-p)^{ième}$ polaire du plan P_0.

De ce théorème nous concluons les cas particuliers suivants :

L'enveloppe des plans dont les premières polaires touchent un plan fixe est le point polaire de ce plan; donc ces plans passent par un point fixe.

L'enveloppe des plans dont les points polaires parcourent un plan fixe est la première polaire de ce plan.

L'enveloppe des plans dont les $p^{ièmes}$ polaires touchent le plan à l'infini est la $(n-p)^{ième}$ enveloppe diamétrale de la surface.

9. Théorème V. — *Les premières polaires de tous les plans passant par un point fixe ont $(n-1)^3$ plans tangents communs, qui sont les $(n-1)^3$ plans ayant pour point polaire le point fixe.*

Nous venons de voir, en effet, que l'enveloppe des plans dont les points polaires sont sur un plan fixe est la première polaire de ce plan; et réciproquement, tout plan tangent à la première polaire d'un plan a son point polaire sur ce plan; cette réciproque résulte du même calcul. Or, soit un point fixe O; imaginons un plan P passant par ce point; les plans dont les points polaires décrivent le plan P sont tangents à la première polaire S de ce plan, surface de $(n-1)^{ième}$ classe. On voit de même que les plans ayant pour point polaire le point O doivent aussi être tangents aux premières polaires S′, S″ de deux autres plans P′, P″ passant par le point O. Ainsi tout plan tangent commun aux trois surfaces S′, S″, S‴ a pour point polaire le point O, et réciproquement. Mais ces trois surfaces, qui sont toutes trois de $(n-1)^{ième}$ classe, ont $(n-1)^3$ plans tangents communs. Donc le point O est le point polaire de $(n-1)^3$ plans, etc.

10. Théorème VI. — *Le point polaire d'un plan tangent à la surface est le point de contact de ce plan tangent; et réciproquement, lorsqu'un plan contient son point polaire, ce plan est tangent à la surface au point polaire.*

Car le point polaire du plan P_0 est

$$(1^\circ)\qquad x\left(\frac{dU}{dx}\right)_0+y\left(\frac{dU}{dy}\right)_0+z\left(\frac{dU}{dz}\right)_0+t\left(\frac{dU}{dt}\right)_0=0;$$

or, si ce plan est tangent à la surface, on a

$$(2^\circ)\qquad U(x_0, y_0, z_0, t_0)=0;$$

ces équations donnent précisément le point de contact du plan P_0 (première partie). Réciproquement, en exprimant que le point polaire est sur le plan, on a

$$x_0\left(\frac{dU}{dx}\right)_0+y_0\left(\frac{dU}{dy}\right)_0+z_0\left(\frac{dU}{dz}\right)_0+t_0\left(\frac{dU}{dt}\right)_0$$
$$=nU(x_0, y_0, z_0, t_0)=0;$$

c'est-à-dire que le plan P_0 est tangent.

11. Théorème VII. — *Les plans tangents aux points où un plan fixe coupe une surface sont en même temps tangents à la première polaire de ce plan.*

Nous avons vu en effet que la première polaire d'un plan P est l'enveloppe des plans dont les points polaires décrivent le plan P (8); par suite, si le point polaire est un des points de l'intersection du plan P avec la surface, le plan dont il est le point polaire sera en même temps tangent à la surface en ce point (10). Donc les plans tangents à la surface aux points où elle est coupée par le plan P sont en même temps tangents à la première polaire de ce plan. Réciproquement, tout plan tangent commun à la surface et à la première polaire du plan P est tangent en un des points d'intersection du plan avec la surface; car le point polaire est à la fois sur le plan P (8) et sur le plan tangent (10).

12. Théorème VIII. — *Les plans tangents aux points où une droite rencontre la surface sont tangents en même temps à la première polaire d'un plan quelconque passant par cette droite. Une surface de $n^{ième}$ classe est, en général, de l'ordre $n(n-1)^2$.*

Soit D la droite donnée, P un plan passant par cette droite, et S la première polaire de ce plan; les plans tangents aux divers points de la courbe d'intersection devront toucher la surfaces (11). Il en sera de même pour la première polaire S′ d'un second plan P′ passant par la droite D. Ainsi tout plan tangent à la surface en un point où elle est rencontrée par la droite D devra toucher aussi les premières polaires S et S′. La réciproque est visible, car le point polaire d'un plan tangent à S et S′ est sur la droite D (8); et comme le plan touche la surface primitive, le point polaire est le point de contact (10). Or, les trois surfaces considérées étant des classes respectives n, $(n-1)$ et $(n-1)$, elles auront, en général, $n(n-1)^2$ plans tangents communs. Donc la droite D rencontre la surface en $n(n-1)^2$ points.

(*La suite prochainement.*)