H.-G. ZEUTHEN

Nouvelle méthode pour déterminer les caractéristiques des systèmes de coniques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 481-492

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__481_0>

NOUVELLE MÉTHODE POUR DÉTERMINER LES CARACTÉRISTIQUES DES SYSTÈMES DE CONIQUES

(voir page 433);

PAR M. H.-G. ZEUTHEN (DE COPENHAGUE).

XI. — *Détermination des caractéristiques d'un système de coniques qui ont deux contacts du second ordre avec une même courbe.*

53. Nous désignons ce système par $[2(C_{m,n})^2]$.

Les théorèmes du n° 52 sont encore vrais ici où la courbe C_{m_1,n_1} coïncide avec la courbe $C_{m,n}$; mais au système $[2(C_{m,n})^2]$ appartiennent encore d'autres coniques singulières que celles qui sont nommées dans ce numéro.

Aux coniques infiniment aplaties nous devrons ajouter :

1° Celles qui sont renfermées dans une tangente d'inflexion et dont les deux sommets coïncident au point d'inflexion;

2° Celles qui sont renfermées dans une tangente de rebroussement et dont les deux sommets coïncident au point de rebroussement.

Comme les sommets de ces coniques infiniment aplaties coïncident, elles sont en même temps des coniques à points doubles. Sous ce point de vue, la seconde classe correspond, selon le principe de dualité, à la première considérée comme partie de λ, et réciproquement. Désignons par x le coefficient de la première classe dans l'expression de λ et de la seconde classe dans celle de ϖ, et par y le coefficient de la seconde classe dans λ et de la première dans ϖ; nous aurons

$$\lambda = 9.t + 3.d'(n-3) + 1.\frac{d'(d'-1)}{2} + x.t' + y.d',$$

$$\varpi = 9.d + 3.t'(m-3) + 1.\frac{t'(t'-1)}{2} + x.d' + y.t';$$

d'où

$$\mu = 6t + 3d + \frac{1}{6}t'[6m + t' - (19 - 2y - 4x)]$$
$$+ \frac{1}{3}d'[6n + d' - (19 - 2y - x)],$$

$$\nu = 3t + 6d + \frac{1}{3}t'[6m + t' - (19 - 2y - x)]$$
$$+ \frac{1}{6}d'[6n + d' - (19 - 2y - 4x)].$$

54. Pour déterminer les coefficients x et y, on applique le lemme 31 au système $[(M)^2, M, l]$ de coniques qui ont avec la courbe M (de l'ordre m et douée d'un point multiple de l'ordre $m-1$) un contact du second et un contact du premier ordre, et qui touchent une droite l (*). Si l'on veut trouver par le lemme le nombre des coniques du système dont un point d'intersection avec M coïncide avec le point de contact du premier ordre, on doit attribuer à r, q, α et β les valeurs suivantes :

$$r = 1, \quad q = 2m - 5,$$
$$\alpha = N(M^2, M\theta, l), \quad \beta = N[(M)^2 - p - M, l],$$

ou [formule (II) du n° 48],

$$\beta = N[(M)^2, M, p, l] - 2N[(M)^2, M\theta, l] - 3N[(M)^2\theta, M, l].$$

(*) En remplaçant le système $[(M)^2, M, l]$ par le système $[(M)^2, M, p]$, on ne trouverait que l'équation $2x + y = 5$, qui admet deux solutions entières et positives.

Par conséquent

$$q\alpha + \beta = (2m - 7)\,N[(M)^2, M\theta, l] + N[(M)^2, M, p, l] \\ - 3N(M^2\theta, M, l).$$

Or, d'après les formules (16), (13) et (18),

$$N[(C_{m,n})^2, C_{m,n}\theta, l] = 3(n-2) + d',$$
$$N[(C_{m,n})^2, C_{m,n}, p, l] = 2(3n + d')(m + n - 12) + 24(m + n),$$
$$N[(C_{m,n})^2\theta, C_{m,n}, l] = m + 2n - 6.$$

En remplaçant ici la courbe $C_{m,n}$ par la courbe M on doit (n° 30) substituer $n = 2(m-1)$, $d' = 0$. Donc

$$q\alpha + \beta = 48m^2 - 213m + 234 = (m-2)(48m - 117).$$

Le nombre $q\alpha + \beta$ comprend :

1° $2N[2(M)^2, l]$, c'est-à-dire le double du nombre des coniques qui ont deux contacts du second ordre avec M et qui touchent l; car chacun des deux contacts du second ordre avec M peut résulter de la coïncidence d'un point d'intersection avec un point de contact du premier ordre;

2° $z.2t$, où z est un coefficient inconnu et t le nombre des tangentes doubles de M, car une conique infiniment aplatie, renfermée dans une tangente double de M et limitée à l'un des points de contact et à la droite l, appartient au système $[(M)^2, M, l]$: son point de contact du premier ordre coïncide avec deux points (*) d'intersection, et le nombre de ces coniques singulières est $2t$;

3° $u.t'$, où u est un coefficient inconnu, et t' le nombre des tangentes d'inflexion de M, car une conique infiniment aplatie renfermée dans une tangente d'inflexion de M, limitée au point d'inflexion et à la droite l, appartient au système $[(M)^2, M, l]$, et dans le point d'in-

(*) On se tromperait si l'on en concluait que z est divisible par 2.

flexion coïncident les points de contact du premier et du second ordre et un point d'intersection avec M.

Par conséquent

$$q\alpha + \beta = 2\mathrm{N}[2(\mathrm{M})^2, l] + 2zt + ut'.$$

Or, selon le n° 30,

$$t = 2(m-2)(m-3), \quad t' = 3(m-2),$$

et $\mathrm{N}[2(\mathrm{M})^2, l]$ se trouve par la substitution, dans l'expression trouvée pour ν au n° 53, de ces valeurs de t et de t', et des valeurs suivantes :

$$n = 2(m-1), \quad d = \frac{(m-1)(m-2)}{2}, \quad d' = 0.$$

On trouve alors

$$q\alpha + \beta = (m-2)\{(36+4z)m - [92 + 12z - 2(2y+x) - 3u]\}.$$

Les deux expressions de $q\alpha + \beta$ devant être identiques, on aura

$$48 = 36 + 4z,$$
$$117 = 92 + 12z - 2(2y + x) - 3u.$$

55. On tire de ces équations

$$z = 3,$$
$$11 = 2(2y + x) + 3u.$$

x, y et u devant être entiers et positifs (*), cette équation donne seulement

$$u = 1, \quad x = 2, \quad y = 1.$$

(*) Si l'un des nombres x ou y était nul, l'autre le serait également; car alors les coniques singulières dont le nombre est multiplié par x dans l'expression de λ, et par y dans celle de ϖ (ou réciproquement), n'appartiendraient pas au système. Or, l'équation trouvée prouve que ces coefficients ne peuvent être nuls tous les deux.

En substituant les valeurs de x et y dans les expressions calculées au n° 53, on trouve

$$(20\,a)\ (^*)\left\{\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{2}(3n+d')^2 - 3(3n+d') - 9t' - 8d', \\ \nu &= \frac{1}{2}(3n+d')^2 - 3(3n+d') - 8t' - 9d', \end{aligned}\right.$$

$$(20\,b)\qquad [2\,(C_{m,n})^2] \equiv (\mu, \nu).$$

On trouve, pour une courbe générale de l'ordre m,

$$(20\,e)\quad\left\{\begin{aligned} \mu &= \frac{9}{2}m(m-2)(m^2-7), \\ \nu &= \frac{3}{2}m(m-2)(3m^2-19). \end{aligned}\right.$$

Pour $m = 2$, on aura $\mu = \nu = 0$;
Pour $m = 3$, on aura $\mu = 27$, $\nu = 36$ (**).

56. Si, dans certains cas particuliers, les formules (20) ne sont pas immédiatement applicables (*voir* le n° 22), on pourra mettre à profit la connaissance acquise des valeurs des coefficients x et y. On a les théorèmes suivants :

Pour un système de coniques qui ont deux contacts du second ordre avec une courbe donnée, on doit compter:

Deux fois *dans le nombre* λ *et* une fois *dans* ϖ, *toute conique infiniment aplatie renfermée dans une tangente d'inflexion de la courbe et limitée par deux points qui coïncident au point d'inflexion;*

(*) Les formules (20 a) donnent la relation suivante :

$$\mu - \nu = d' - t' = 3(m-n).$$

(**) Une conique ayant deux contacts du second ordre avec une courbe du troisième ordre, la corde de contact passe par un des neufs points d'inflexion. Par conséquent, le système $[(C_{3,6})^2]$ se divise en neuf systèmes partiels dont les caractéristiques sont $\mu = 3$ et $\nu = 4$.

Une fois *dans le nombre* λ *et* deux fois *dans le nombre* ϖ, *toute conique ayant un point double en un point de rebroussement de la courbe, et composée de deux droites qui coïncident* avec *la tangente de rebroussement.*

XII. — *Détermination des caractéristiques des systèmes de coniques qui ont un contact du troisième ordre et un contact du premier ordre avec des courbes données.*

57. Le système $[(C_{m,n})^3, C_{m_1,n_1}]$ contient toute conique infiniment aplatie :

1° Renfermée dans une tangente à $C_{m,n}$ en l'un de ses points d'intersection avec C_{m_1,n_1} et limitée par des points qui coïncident avec ce point ;

2° Renfermée dans une tangente commune aux deux courbes et limitée par deux points qui coïncident au point de contact avec $C_{m,n}$;

3° Renfermée dans une tangente d'inflexion de $C_{m,n}$ et limitée au point d'inflexion, et à $C_{m,n}$;

4° Renfermée dans une tangente de rebroussement de $C_{m,n}$ et limitée au point de rebroussement et à $C_{m,n}$.

On aura donc

$$\lambda = x.mm_1 + y.nn_1 + z.t'm_1 + u.d'm_1,$$

et, par le principe de dualité,

$$\varpi = x.nn_1 + y.mm_1 + z.d'n_1 + u.t'n_1.$$

Par conséquent

$$\mu = \mu'' m_1 + \mu' n_1, \quad \nu = \nu'' m_1 + \nu' n_1,$$

où

$$\mu' = \frac{1}{3}[(x + 2y)n + zd' + ut'],$$

$$\mu'' = \frac{1}{3}[(2x + y)m + 2zt' + 2ud'],$$

$$\nu' = \frac{1}{3}[(2x + y)n + 2ut' + 2zd'],$$

$$\nu'' = \frac{1}{3}[(x + 2y)m + zt' + ud'].$$

Or,

$$\mu'' = \mathrm{N}[(\mathrm{C}_{m,n})^3, p, l] = \nu',$$

d'où

$$(2x + y)(m - n) = 2(z - u)(d' - t'),$$

et comme

$$3(m - n) = d' - t'$$

(d'après la formule IV de la première note du n° 11),

$$2x + y = 6(z - u).$$

58. Pour trouver d'autres moyens propres à déterminer les coefficients, appliquons le lemme du n° 31 au système $[(\mathrm{M})^2, p_1, p_2]$. Dans ce cas

$$r = 2, \quad q = 2m - 3,$$
$$\alpha = \mathrm{N}[(\mathrm{M})^2\,\theta_1.p_1, p_2],$$
$$\beta = \mathrm{N}[(\mathrm{M})^2 - p, p_1, p_2].$$

ou [d'après l'équation (II) du n° 43]

$$\beta = \mathrm{N}[(\mathrm{M})^2, p, p_1, p_2] - 3\mathrm{N}[(\mathrm{M})^2\,\theta, p_1, p_2].$$

Par conséquent

$$q\alpha + \beta = (2m - 6)\mathrm{N}[(\mathrm{M})^2\,\theta, p_1, p_2] + \mathrm{N}[(\mathrm{M})^2, p, p_1, p_2].$$

Or, selon les formules (17) et (11),

$$\mathrm{N}[(\mathrm{C}_{m,n})^2\,\theta, p_1, p_2) = 1,$$
$$\mathrm{N}[(\mathrm{C}_{m,n})^2, p, p_1, p_2) = 3n + d',$$

où il faut substituer pour la courbe M (n° 30)

$$n = 2(m - 1), \quad d' = 0.$$

On trouve alors

$$q\alpha + \beta = 8m - 12.$$

Comme aucune conique du système dont un point de contact coïncide avec un point d'intersection n'est infiniment aplatie, on aura aussi (n° 31)

$$q\alpha + \beta = \mathrm{N}[(\mathrm{M})^3, p_1, p_2],$$

dont on aura une expression en substituant dans la valeur de μ trouvée au n° 57,

$$n = 2(m - 1), \quad d' = 0, \quad t' = 3(m - 2);$$

ce qui donne

$$q\alpha + \beta = \frac{1}{3}[(2x + 4y + 3u)m - (2x + 4y + 6u)].$$

Les deux expressions de $q\alpha + \beta$ devant être identiques, on trouve

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} 2\alpha + 4y + 3u = 24, \\ 2\alpha + 4y + 6u = 36. \end{cases}$$

59. Les équations (I) du n° 57 et (II) du n° 58 suffisent à déterminer les trois coefficients, car on sait qu'ils doivent être entiers et positifs (*). On trouve

$$x = 2, \quad y = 2, \quad z = 5, \quad u = 4.$$

En introduisant ces valeurs dans les expressions trouvées au n° 57, on aura, pour résoudre le problème actuel, les

---

(*) Quant aux signes des coefficients, il suffit de supposer que x, u et z ne sont pas négatifs et que y est positif. Or, y étant nul, x le serait aussi d'après la signification de ces coefficients (n° 57 et première note du n° 55), ce que nos équations ne permettent pas.

formules suivantes :

$$(21\,a)\ (^*)\quad \begin{cases} \mu' = 6n - 4m + 3d' = 5m - 3n + 3t', \\ \mu'' = \nu' = 2(5n - 4m + 3d') = 2(5m - 4n + 3t'), \\ \nu'' = 6m - 4n + 3t' = 5n - 3m + 3d'. \end{cases}$$

$$(2\,b)\quad \begin{cases} [(C_{m,n})^3, C_{m_1,n_1}] \equiv (\mu'' m_1 + \mu' n_1, \nu'' m_1 + \nu' n_1), \\ [(C_{m,n})^3, p] \equiv (\mu', \nu'), \\ [(C_{m,n})^3, l] \equiv (\mu'', \nu''). \end{cases}$$

On trouve, pour une courbe générale de l'ordre m :

$$(21\,c)\quad \begin{cases} \mu' = 2m(3m - 5), \\ \mu'' = \nu' = 2m(5m - 9), \\ \nu'' = m(5m - 8). \end{cases}$$

Pour $m = 2$ on trouve $\mu' = \mu'' = \nu' = \nu'' = 4$ (**).
Pour $m = 3$ on trouve $\mu' = 24$, $\mu'' = \nu' = 36$, $\nu'' = 21$.

60. Des valeurs de x, y, z, u on déduit les théorèmes suivants :

Pour un système de coniques qui ont un contact du troisième ordre et un contact du premier ordre respectivement avec deux courbes données $C_{m,n}$ *et* C_{m_1,n_1}, *on doit compter :*

Deux fois *dans le nombre* λ *et* deux fois *dans le nombre* ϖ, *toute conique ayant un point double à un point d'intersection des deux courbes et composée de deux droites qui coïncident dans la tangente à* $C_{m,n}$ *au même point ;*

Deux fois *dans* λ *et* deux fois *dans* ϖ, *toute conique*

(*) On voit que

$$2\mu' - \nu' = 2n,$$
$$2\nu'' - \mu'' = 2m.$$

(**) *Voir* CHASLES, *Traité des Sections coniques*, n° 514.

infiniment aplatie, renfermée dans une tangente commune aux deux courbes, et limitée par deux points qui coïncident au point de contact avec $C_{m,n}$;

Il faut encore compter dans le nombre λ :

Cinq fois, *toute conique infiniment aplatie, renfermée dans une tangente d'inflexion de* $C_{m,n}$, *et limitée au point d'inflexion et à la courbe* C_{m_1,n_1};

Quatre fois, *toute conique infiniment aplatie renfermée dans une tangente de rebroussement de* $C_{m,n}$, *et limitée au point de rebroussement et* à C_{m_1,n_1};

Et dans le nombre ϖ :

Cinq fois, *toute conique ayant un point double en un point de rebroussement de* $C_{m,n}$ *et composée de la tangente de rebroussement et d'une tangente à* C_{m_1,n_1};

Quatre fois, *toute conique ayant un point double en un point d'inflexion de* $C_{m,n}$ *et composée de la tangente d'inflexion et d'une tangente à* C_{m_1,n_1}

61. Les théorèmes du n° 60 sont encore vrais lorsque la courbe C_{m_1,n_1} coïncide avec la courbe $C_{m,n}$. Ils sont donc utiles à la détermination des caractéristiques du système $[(C_{m,n})^3, C_{m,n}]$ dont les coniques ont avec $C_{m,n}$ deux contacts respectivement du troisième et du premier ordre. Le système ne contient pas d'autres coniques singulières que celles qui sont mentionnées dans ces théorèmes (*). On trouve donc

$$\lambda = 2.2d + 2.2t + 5.t'(m-3) + 4.d'(m-3),$$
$$\varpi = 2.2t + 2.2d + 5.d'(n-3) + 4.t'(n-3),$$

(*) On pourrait croire que les deux espèces de coniques singulières qui sont nommées dans le n° 56, appartiennent également à ce système-ci; mais en les discutant avec soin, on trouve qu'elles ne sont d'aucune façon des limites de coniques qui satisfont à ses conditions. Du reste, on pourrait les introduire dans les nombres λ et ϖ, avec des coefficients qui seraient entiers et positifs ou nuls. On trouverait par les méthodes ordinaires qu'ils ont la valeur zéro.

d'où

$$(22a)\quad \begin{cases} \mu = 2(-4m^2 + 3mn + 3n^2 + 28m - 32n) \\ \qquad + 3(2m + n - 13)d', \\ \nu = -3m^2 - 3mn + 10n^2 + 53m - 61n \\ \qquad + 3(m + 2n - 13)d', \end{cases}$$

$$(22b)\qquad [(C_{m,n})^3, C_{m,n}] \equiv (\mu, \nu),$$

et, pour une courbe générale de l'ordre m,

$$(22c)\quad \begin{cases} \mu = 6m(m-2)(m^2 + m - 10), \\ \nu = m(m-2)(10m^2 - 3m - 57). \end{cases}$$

62. Si les deux courbes $C_{m,n}$ et C_{m_1,n_1} se touchent, on fera usage de la formule suivante :

$$(\text{I})\quad N[(C_{m,n})^3, C_{m_1,n_1}, Z] = 4N[(C_{m,n})^3\theta, Z] + N[(C_{m,n})^3 - C_{m_1,n_1}, Z],$$

où $(C_{m,n})^3\theta$ signifie la condition d'un contact du troisième ordre en un point donné, et $(C_{m,n})^3 - C_{m_1,n_1}$ celles de deux contacts séparés respectivement du troisième et du premier ordre avec deux courbes $C_{m,n}$ et C_{m_1,n_1} qui se touchent elles-mêmes.

On aura en particulier

$$(\text{II})\quad N[(C_{m,n})^3, p, Z] = 4N[(C_{m,n})^3\theta, Z] + N[(C_{m,n})^3 - p, Z],$$

où $(C_{m,n}^{\,;})-p$ signifie les conditions d'un contact du troisième ordre avec $C_{m,n}$ et d'une intersection avec la même courbe en un point donné, et

$$(\text{III})\quad N[(C_{m,n})^3, l, Z] = 4N[(C_{m,n})^3\theta, Z] + N[(C_{m,n})^3 - l, Z].$$

D'après la formule (I) le système $[(C_{m,n})^3, C_{m_1,n_1}]$ se divise, dans le cas où $C_{m,n}$ et C_{m_1,n_1} se touchent à un point θ en $[(C_{m,n})^3\theta]$ et $[(C_{m,n})^3 - C_{m_1,n_1}]$, et chacune des caractéristiques du grand système comprend quatre fois la caractéristique homologue du premier système partiel et une fois celle du second système partiel. Or, on trouve sans difficulté

$$[(C_{m,n})^3 \theta) \equiv (1, 1).$$

Les caractéristiques du système $[(C_{m,n})^3 - C_{m_1,n_1}]$ sont faciles à trouver.

(*La fin prochainement.*)