Nouvelles annales de mathématiques

Roger Alexandre

Note sur le moyen de ramener une équation quelconque du quatrième degré à une équation réciproque du même degré

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 477-478

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__477_1>

NOTE

sur le moyen de ramener une équation quelconque du quatrième degré à une équation réciproque du même degré;

Par M. Roger ALEXANDRE.

Le type général des équations du quatrième degré est

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0.$$

Si nous y remplaçons x par $y + h$, y étant une nouvelle inconnue et h une indéterminée, nous aurons une équation de la même forme en y,

$$y^4 + p'y^3 + q'y^2 + r'y + s' = 0,$$

dans laquelle p', q', r', s' sont des fonctions de h.

Divisons tous les termes par s', nous aurons

$$\frac{y^4}{s'} + \frac{p'y^3}{s'} + \frac{q'y^2}{s'} + \frac{r'y}{s'} + 1 = 0.$$

Changeons encore d'inconnue, et faisons dans cette équation

$$\frac{y}{s'^{\frac{1}{4}}} = z,$$

elle deviendra

$$z^4 + \frac{p'}{s'^{\frac{1}{4}}} z^3 + \frac{q'}{s'^{\frac{1}{2}}} z^2 + \frac{r'}{s'^{\frac{3}{4}}} z + 1 = 0.$$

Nous avons déjà obtenu l'égalité des coefficients extrêmes; si maintenant nous pouvons déterminer h de manière à rendre égaux entre eux les coefficients de z et de z^3, l'équation précédente sera réciproque.

Posons donc

$$\frac{p'}{s'^{\frac{1}{4}}} = \frac{r'}{s'^{\frac{3}{4}}},$$

d'où nous tirons, en multipliant les deux membres par $s'^{\frac{3}{4}}$ puis les élevant au carré,

$$s' p'^2 = r'^2,$$

ou, en remplaçant les trois coefficients par leurs valeurs,

$$\left\{\begin{aligned} p' &= 4h + p, \\ r' &= 4h^3 + 3ph^2 + 2qh + r, \\ s' &= h^4 + ph^3 + qh^2 + rh + s, \end{aligned}\right.$$

$$(h^4 + ph^3 + qh^2 + rh + s)(4h + p)^2 = (4h^3 + 3ph^2 + 2qh + r)^2.$$

Et nous obtiendrons enfin, en développant et ordonnant par rapport à h,

$$h^3(p^3 + 8r - 4pq) + h^2(p^2q + 2pr + 16s - 4q^2) \\ + h(p^2r + 8ps - 4qr) + p^2s - r^2 = 0,$$

équation du troisième degré qui nous donnera toujours au moins une valeur réelle pour h.

La question proposée peut alors être considérée comme résolue.