Nouvelles annales de mathématiques

Solution de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 459-473

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__459_0>

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 613;

PAR M. AR. VIANT (*),
Au Prytanée Militaire.

On donne une conique et un point fixe O *dans son plan. Du point* O *on mène deux droites* OA, OB *perpendiculaires entre elles, qui coupent la conique en* A *et* B. *On joint le point* A *au point* B, *et l'on mène en ces points les tangentes* AT, BT *à la conique; on projette le point* O *sur les trois côtés du triangle* ABT; *par les trois points ainsi obtenus on fait passer une circonférence. Pour chacune des positions de l'angle droit, on obtient ainsi une circonférence; démontrer que toutes ces circonférences sont tangentes à une même circonférence.*

La circonférence des projections du point O peut être considérée comme la podaire, par rapport à O, d'une conique tangente aux trois côtés du triangle ABT et ayant un foyer au point O. Cherchons l'enveloppe de ces coniques.

La transformation par les polaires réciproques, lorsque la courbe directrice est une circonférence admettant le

(*) La question 613 a déjà été résolue (numéro de juin, p. 277). La solution de M. Viant n'a pas été mentionnée. C'est une omission qne nous reparons en insérant cette solution dans le présent numéro. Elle diffère d'ailleurs en plusieurs points de celle qui a été donnée par M. Bauquenne.

point O pour centre, remplace les coniques focales, inscrites dans le triangle variable ABT, par des cercles circonscrits aux triangles polaires conjugués des triangles ABT.

Soit *abt* un de ces nouveaux triangles (les petites lettres désignant les pôles des côtés opposés aux sommets de même nom). Le triangle *abt*, relativement à la conique transformée de la conique donnée, est placé comme le triangle ABT relativement à celle-ci. De plus, OA, OB étant rectangulaires, les tangentes *at*, *bt* à la transformée *ab* le sont pareillement.

Or, la circonférence circonscrite au triangle *abt* est évidemment tangente en *t* à la circonférence fixe d'où l'on voit la conique *ab* sous un angle droit (*). Par suite, la conique transformée de la circonférence circonscrite au triangle *abt*, c'est-à-dire la conique mobile du foyer O, reste toujours tangente à une conique qui a le point O pour foyer, et le contact a lieu sur la polaire AB de *t* (**).

Revenant à la question proposée, on voit que la circonférence des projections du point O touche constamment une circonférence fixe, et que le contact a lieu au

(*) La conique *ab*, transformée de la conique donnée AB, touche les côtés *at*, *bt* du triangle *abt* aux points *a* et *b*. Le centre *c* de cette conique *ab* est sur la droite menée du point *t* au milieu *m* de la corde des contacts *ab*. Le point *m* est le centre de la circonférence circonscrite au triangle *abt*, parce que l'angle *atb* est droit. Les deux circonférences dont il s'agit passent par le point *t*, leurs centres *m* et *c* sont sur une droite menée par ce point; donc elles sont tangentes l'une à l'autre au point *t*.

(**) Cette dernière conique est l'enveloppe des cordes AB de la conique donnée, qui sont vues du point O sous un angle droit. L'un de ses foyers coïncide avec le point O, la directrice correspondante à ce foyer est la polaire du point O par rapport à la conique donnée. Son centre est à l'intersection de la perpendiculaire abaissée du point O sur la polaire et de la droite qui unit les milieux de deux cordes rectangulaires menées par le point O dans la conique donnée. G.

pied de la perpendiculaire abaissée de O sur AB (*), ce qui démontre accidentellement ce théorème connu : *Le lieu des projections d'un point sur une corde* AB *vue de ce point sous un angle droit est une circonférence.*

Note. — M. Viant remarque qu'au moyen de la transformation par polaires réciproques, en prenant pour courbe directrice un cercle quelconque dont le centre soit autre que le point O, on peut déduire du théorème démontré un nombre illimité d'autres théorèmes, ce qui est incontestable. Mais, comme le remarque aussi M. Viant, les propriétés des sections coniques qui donnent lieu à de longs énoncés ne présentent que peu d'intérêt.

Question 675

(voir 2e série, t. II, p. 479);

PAR M. LAISANT,

Lieutenant du Génie, Licencié ès sciences.

Soient ABC *un triangle isocèle dont chacun des angles* A, B *a pour mesure* arc tang $2\sqrt{2}$; *et* p, q, r *les longueurs des perpendiculaires abaissées des sommets* A, B, C *sur une ligne droite quelconque située dans le plan du triangle; mener par un point donné une droite telle, que la somme algébrique*

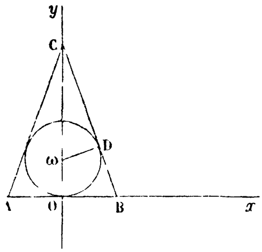
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{2}{r}=0. \tag{1}$$

G. J. OXFORD.

Prenons la base AB du triangle pour axe des x, la hau-

(*) Effectivement, il est facile de voir que si deux coniques ayant pour foyer commun le point O touchent une droite AB au même point, leurs podaires relatives au foyer commun O sont elles-mêmes tangentes au point de rencontre de AB et de la perpendiculaire abaissée de O sur cette droite. Or, la podaire de la conique enveloppe des cordes AB est évidemment une circonférence fixe; par conséquent, la proposition est démontrée. G.

teur OC pour axe des y; soit h cette hauteur OC. Soit $a = OA = OB$. On aura $h = 2a\sqrt{2}$ d'après l'hypothèse.



Soit maintenant $y = mx + n$ l'équation d'une droite située dans le plan du triangle. Les distances p, q, r de cette droite aux trois sommets A, B, C sont respectivement proportionnelles à $+ma - n$, $-ma - n$, $h - n$. On peut remplacer p, q, r par des quantités proportionnelles dans l'équation (1), à cause de l'homogénéité de cette équation, et nous exprimerons que la droite satisfait à la condition en écrivant

$$(2) \qquad \frac{1}{ma - n} + \frac{1}{-ma - n} + \frac{2}{h - n} = 0,$$

ou, par transformation,

$$m^2a^2 + nh - 2n^2 = 0,$$

ou, à cause de $h^2 = 8a^2$,

$$\frac{1}{8}m^2h^2 + nh - 2n^2 = 0,$$

$$m^2h^2 = 16n^2 - 8nh,$$

$$(m^2 + 1)h^2 = 16n^2 - 8nh + h^2 = (h - 4n)^2,$$

$$h = \pm\frac{h - 4n}{\sqrt{m^2 + 1}},$$

$$\frac{h}{4} = \pm\frac{\frac{h}{4} - n}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

Le premier membre est constant, le second membre exprime la distance de la droite $y = mx + n$ au point $x = 0$, $y = \frac{h}{4}$. Donc, toute droite satisfaisant à la condition, est tangente à un cercle ayant son centre en ω au quart de la hauteur, et un rayon égal à $\frac{h}{4}$. C'est le cercle inscrit dans le triangle, car

$$\omega D = \omega C . \cos C\omega D = \frac{3}{4} h \times \frac{1}{\sqrt{1 + (2\sqrt{2})^2}} = \frac{1}{4} h.$$

Il est clair que cette propriété renferme la solution de la question, solution double en général, mais qui pourra devenir unique, ou même disparaître, suivant la position du point donné.

Généralisation. — On peut se proposer de généraliser le problème en en modifiant un peu l'énoncé. Supposons l'angle à la base quelconque; de plus, mettons un nombre quelconque μ à la place de 2 dans l'équation de condition, et voyons dans quels cas la solution trouvée ci-dessus s'appliquera ici. L'équation (2) deviendra

$$\frac{1}{ma - n} + \frac{1}{-ma - n} + \frac{\mu}{h - n} = 0$$

ou

$$\mu m^2 a^2 + 2nh - (\mu + 2) n^2 = 0.$$

Soit k la tangente de l'angle à la base, on a

$$h = ak,$$

et, par suite,

$$\mu m^2 \frac{h^2}{k^2} + 2nh - (\mu + 2) n^2 = 0,$$

$$m^2 h + \frac{2k^2}{\mu} nh - \frac{k^2}{\mu} (\mu + 2) n^2 = 0,$$

$$m^2 h^2 = \frac{k^2}{\mu}(\mu + 2)n^2 - \frac{2k^2}{\mu} nh,$$

$$(m^2+1)h^2 = h^2 - \frac{2k^2}{\mu} nh + \frac{k^2}{\mu}(\mu + 2)n^2.$$

Cherchons la condition pour que le second membre soit un carré parfait. C'est

$$\frac{4k^4}{\mu^2} = 4\frac{k^2}{\mu}(\mu + 2)$$

ou

$$k^2 = \mu(\mu + 2),$$

$$\mu^2 + 2\mu - k^2 = 0. \tag{3}$$

Si cette condition est satisfaite, il vient

$$(m^2+1)h^2 = \left(h - \frac{k^2 n}{\mu}\right)^2,$$

$$\frac{\mu h}{k^2} = \pm \frac{\frac{\mu h}{k^2} - n}{\sqrt{m^2+1}}.$$

La droite $y = mx + n$ satisfaisant à la condition $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{\mu}{r} = 0$ est alors tangente à un cercle de rayon $\frac{\mu h}{k^2}$ dont le centre a pour coordonnées $x = 0, y = \frac{\mu h}{k^2}$.

Ce cercle est le cercle inscrit au triangle, si on prend pour μ la racine positive μ_1 de l'équation (3). Si on prend au contraire la racine négative μ_2, on a le cercle tangent aux trois côtés du triangle, mais au-dessous de la base. Des calculs très-simples font voir tout cela. Voici un tableau de quelques valeurs correspondantes de k et de μ, comprenant des valeurs entières de cette dernière quantité :

μ_1	μ_2	k
$+1$	-3	$\sqrt{3}$
$+2$	-4	$\sqrt{8}$
$+3$	-5	$\sqrt{15}$
$+4$	-6	$\sqrt{24}$
....	....	...

On voit, par exemple, que dans la question proposée on aurait, en menant une tangente au cercle exinscrit dont il vient d'être question, la solution répondant à la condition

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{4}{r}=0.$$

Question 764;

Par M. ROQUE,
Grenadier au 49^e de ligne.

Les axes des paraboles qui ont pour foyer un point donné M, *et qui passent par deux points donnés* F, F′, *sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole qui a pour foyers les deux derniers points donnés* F *et* F′, *et qui passe par le premier* M.

Si des points F, F′ comme centres, avec FM, F′M pour rayons, je décris des cercles, et si je mène les deux tangentes communes à ces cercles, j'aurai les directrices de deux paraboles satisfaisant aux conditions de l'énoncé;

leurs axes seront parallèles aux rayons menés aux points de contact.

Soient O et OA le centre et l'une des asymptotes de l'hyperbole dont F, F' sont les foyers et qui passe par le point M; on aura

$$\cos \mathrm{AOF} = \frac{a}{c} = \frac{\mathrm{F'M} - \mathrm{FM}}{\mathrm{FF'}}.$$

D'autre part, soient FK le rayon mené du centre F au point de contact K de la tangente commune aux deux cercles, et O' le centre de similitude de ces deux courbes, on aura

$$\cos \mathrm{KFO'} = \frac{\mathrm{FK}}{\mathrm{FO'}} = \frac{\mathrm{F'M} - \mathrm{FM}}{\mathrm{FF'}};$$

donc FK est parallèle à OA. Ainsi, les axes des deux paraboles sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole.

C. Q. F. D.

Note. — Autres solutions de MM. Laisant; A. Gille, élève de l'École Sainte-Geneviève; Camille Massing, élève de l'École Centrale; C. B., de Gand; J. Graindorge, élève ingénieur des Mines à Liege; Biny, elève au lycee de Toulouse; A. Robin et F. Gaston, du lycée de Grenoble; J. Rakouski; Camille Laduron, elève à l'École des Mines de Liége; et P. H.

Question 766;

PAR M. LAISANT,

Lieutenant du Génie, Licencié ès sciences.

Les deux ellipses de Cassini, données par les équations

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) + a^4 = b^4,$$
$$(x^2 + y^2)^2 - 2a'^2(x^2 - y^2) + a'^4 = b'^4,$$

se coupent orthogonalement, pourvu que l'on ait

$$(a^2 - a'^2)^2 = b^4 + b'^4.$$

(STREBOR.)

Soient x, y les coordonnées d'un point M commun aux deux courbes, on aura, en ajoutant leurs équations,

$$(1)\quad 2(x^2+y^2)^2 - 2(a^2+a'^2)(x^2-y^2) + a^4 + a'^4 - (b^4+b'^4) = 0.$$

Le coefficient angulaire de la tangente à la première ellipse au point M est

$$\alpha = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)},$$

ou, réduction faite,

$$\alpha = -\frac{x}{y}\cdot\frac{x^2+y^2-a^2}{x^2+y^2+a^2}.$$

De même, pour la seconde courbe,

$$\alpha' = -\frac{x}{y}\cdot\frac{x^2+y^2-a'^2}{x^2+y^2+a'^2}.$$

En multipliant, on a

$$\alpha\alpha' = \frac{x^2}{y^2}\cdot\left[\frac{(x^2+y^2)^2-(a^2+a'^2)(x^2+y^2)+a^2a'^2}{(x^2+y^2)^2+(a^2+a'^2)(x^2+y^2)+a^2a'^2}\right].$$

Remplaçant $(x^2+y^2)^2$ par sa valeur tirée de l'équation (1), il vient

$$\alpha\alpha' = \frac{x^2}{y^2}\left[\frac{-4(a^2+a'^2)y^2-(a^2-a'^2)^2+b^4+b'^4}{4(a^2+a'^2)x^2-(a^2-a'^2)^2+b^4+b'^4}\right].$$

Cette expression se réduit à -1 dans l'hypothèse

$$(a^2-a'^2)^2 = b^4+b'^4,$$

de sorte qu'au point (x, y) considéré, les deux courbes se couperont orthogonalement.

Cette démonstration suppose, il est vrai, l'existence du point commun M; mais, en examinant les formes respectives des deux courbes, on arrive facilement à voir qu'elles se coupent effectivement lorsque $(a^2-a'^2)^2 = b^4+b'^4$.

Car, de

$$(a^2-a'^2)^2 = b^4+b'^4,$$

on tire, en supposant $a > a'$,

$$b^2 - b'^2 < a^2 - a'^2 < b^2 + b'^2, \quad \text{si} \quad b > b',$$

ou bien

$$b'^2 - b^2 < a^2 - a'^2 < b^2 + b'^2, \quad \text{si} \quad b < b'.$$

Dans le premier cas, on a

$$a'^2 - b'^2 < a^2 - b^2 < a'^2 + b'^2 < a^2 + b^2.$$

Alors, suivant que $a^2 - b^2$ sera $>$ ou $<$ o, les deux courbes seront chacune formées de deux ovales séparés, ou continues toutes deux. Dans la première hypothèse elles se coupent, car les termes des inégalités ci-dessus sont les carrés des abscisses des points de rencontre avec l'axe des x.

Dans la seconde hypothèse, les deux courbes se coupent encore, car

$$b^2 - a^2 < b'^2 - a'^2,$$

et ces termes sont les carrés des ordonnées des points de rencontre avec l'axe des y.

Lorsqu'on a

$$b < b',$$

il vient

$$b'^2 + a'^2 < a^2 + b^2, \quad \text{et} \quad a^2 - b^2 < a'^2 + b'^2.$$

En outre,

$$a^2 - b^2 > a'^2 - b'^2,$$

puisque

$$a > a' \quad \text{et} \quad b < b'.$$

Donc,

$$a'^2 - b'^2 < a^2 - b^2 < a'^2 + b'^2 < a^2 + b^2,$$

comme précédemment, et on arrive aux mêmes conclusions.

Note. — MM. J. Graindorge, elève ingénieur des Mines a Liége; C. B., de Gand, C. Massing, élève de l'École Centrale, Camille Laduron, élève de l'École des Mines de Liége, E. Canel, élève du lycée de Douai, P. Capin, du lycée de Montpellier, et E. Muzeau ont démontré qu'en un point commun aux deux courbes, leurs tangentes sont rectangulaires.

L'existence des points communs *réels* résulte de la résolution des deux équations proposées, en ayant égard à l'hypothèse

$$(a^2 - a'^2)^2 = b^4 + b'^4.$$

En coordonnées polaires, ces équations deviennent

$$\rho^4 - 2a^2\rho^2\cos 2\omega + a^4 - b^4 = 0,$$
$$\rho^4 - 2a'^2\rho^2\cos 2\omega + a'^4 - b'^4 = 0,$$

leur addition donne

$$\rho^4 - (a^2 + a'^2)\rho^2\cos 2\omega + a^2a'^2 = 0,$$

d'où

$$(1)\qquad \cos 2\omega = \frac{\rho^4 + a^2a'^2}{(a^2 + a'^2)\rho^2}.$$

Par suite,

$$\rho^4 - \frac{2a'^2(\rho^4 + a^2a'^2)}{a^2 + a'^2} + a'^4 - b'^4 = 0,$$

$$(2)\qquad \rho^4 = a'^4 + \frac{b'^4(a^2 + a'^2)}{a^2 - a'^2} = a^4 - \frac{b^4(a^2 + a'^2)}{a^2 - a'^2}.$$

En admettant, ce qui est permis, qu'on ait $a^2 > a'^2$, l'équation (2) détermine pour ρ^2 une valeur réelle et positive comprise entre a'^2 et a^2, et il en résulte une valeur de $\cos 2\omega$ réelle et moindre que l'unité. Car l'inégalité

$$\frac{\rho^4 + a^2a'^2}{(a^2 + a'^2)\rho^2} < 1$$

revient à

$$\rho^4 - (a^2 + a'^2)\rho^2 + a^2a'^2 < 0,$$

d'où

$$(\rho^2 - a'^2)(\rho^2 - a^2) < 0.$$

Cette dernière condition est évidemment remplie, puisque la valeur de ρ^2 est comprise entre a'^2 et a^2. G.

Question proposée;

SOLUTION DE M. L. AMALRIC,

Élève de l'institution Sainte-Barbe (cours du lycée Louis-le-Grand).

Un cercle se meut en restant tangent à une ellipse, de manière à avoir avec cette courbe un système de tan-

gentes communes parallèles; quel est le lieu de son centre?

Je prends pour axes de coordonnées les deux axes de l'ellipse; l'origine est le centre O de cette courbe. J'appelle X, Y les coordonnées du centre M d'un cercle ayant en commun avec l'ellipse deux tangentes parallèles; la direction de ces tangentes est celle du diamètre OM; et la distance du centre O à ces mêmes tangentes est le rayon du cercle. Je puis donc écrire immédiatement l'équation de ce cercle

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 = \frac{a^2 Y^2 + b^2 X^2}{X^2 + Y^2},$$

$2a$, $2b$ étant les longueurs des axes de l'ellipse.

Comme je discuterai plus tard l'équation du lieu du centre en coordonnées polaires, j'écris

$$X^2 + Y^2 = \rho^2, \quad X = \rho \cos\omega, \quad Y = \rho \sin\omega,$$

et je pose

$$a^2 \sin^2\omega + b^2 \cos^2\omega = M^2;$$

de là l'équation du cercle sous cette autre forme

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - 2Xx - 2Xy + \rho^2 - M^2 = 0.$$

Tous les cercles qu'elle représente doivent être tangents à l'ellipse; je puis donc former l'équation en λ relative à l'équation (1) et à l'équation de l'ellipse

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2 = 0;$$

et, en exprimant que cette équation en λ a une racine double, j'aurai une équation $f(X, Y) = 0$ qui sera celle du lieu demandé.

J'ai ainsi

$$x^2(\lambda b^2 + 1) + y^2(\lambda a^2 + 1) - 2Xx - 2Yy - \lambda a^2 b^2 + \rho^2 - M^2 = 0,$$

et

$$(\lambda b^2+1)(\lambda a^2+1)(\rho^2 - \mathrm{M}^2 - \lambda a^2 b^2)$$
$$- (\lambda b^2+1)\mathrm{Y}^2 - (\lambda a^2+1)\mathrm{X}^2 = 0.$$

J'ordonne par rapport à λ, il vient

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{l} a^4 b^4 \lambda^3 + a^2 b^2 (a^2 + b^2 + \mathrm{M}^2 - \rho^2)\lambda^2 \\ \quad + [a^2 b^2 + a^2 \mathrm{X}^2 + b^2 \mathrm{Y}^2 + (a^2 + b^2)(\mathrm{M}^2 - \rho^2)]\lambda + \mathrm{M}^2 = 0. \end{array} \right.$$

La relation $f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = 0$, qui exprimerait que cette équation a deux racines égales, serait très-compliquée, puisqu'elle est ordinairement considérée comme le résultat de l'élimination de λ entre deux équations du second degré, obtenues en dérivant l'équation précédente par rapport à λ, et à une nouvelle variable introduite de manière à rendre l'équation homogène.

Dans ce cas, à cause de la forme particulière de l'équation (2), on peut, en transformant les coefficients, faire apparaître une de ses racines.

Le coefficient de λ peut s'écrire

$$(a^2 + b^2)\mathrm{M}^2 + a^2 b^2 + a^2 \mathrm{X}^2 + b^2 \mathrm{Y}^2 - (a^2 + b^2)(\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2)$$
$$= (a^2 + b^2)\mathrm{M}^2 + a^2 b^2 - b^2 \mathrm{X}^2 - a^2 \mathrm{Y}^2$$
$$= (a^2 + b^2 - \rho^2)\mathrm{M}^2 + a^2 b^2.$$

Je pose

$$a^2 + b^2 - \rho^2 + \mathrm{M}^2 = \mathrm{N}^2,$$

et alors l'équation (2) devient

$$a^4 b^4 \lambda^3 + a^2 b^2 \mathrm{N}^2 \lambda^2 + [a^2 b^2 + (\mathrm{N}^2 - \mathrm{M}^2)\mathrm{M}^2]\lambda + \mathrm{M}^2 = 0,$$

ou

$$(3)\qquad (a^2 b^2 \lambda + \mathrm{M}^2)[a^2 b^2 \lambda^2 + (\mathrm{N}^2 - \mathrm{M}^2)\lambda + 1] = 0.$$

Cette équation peut avoir une racine double de deux manières :

1° Quand l'équation du second degré

$$a^2b^2\lambda^2 + (N^2 - M^2)\lambda + 1 = 0$$

a ses racines égales, ce qui donne

$$(N^2 - M^2)^2 - 4a^2b^2 = 0,$$
$$(N^2 - M^2 + 2ab)(N^2 - M^2 - 2ab) = 0,$$

ou, parce que

$$N^2 - M^2 = a^2 + b^2 - \rho^2,$$
$$[(a+b)^2 - \rho^2][(a-b)^2 - \rho^2] = 0.$$

De là

$$\rho = (a+b) \quad \text{et} \quad \rho = (a-b).$$

Ainsi les deux circonférences C, C', concentriques à l'ellipse, et ayant respectivement pour rayons la demi-somme et la demi-différence des axes de cette courbe, appartiennent au lieu des centres.

2° La racine $-\frac{M^2}{a^2b^2}$ de l'équation (3) peut aussi être racine de l'équation du second degré

$$a^2b^2\lambda^2 + (N^2 - M^2)\lambda + 1 = 0$$

et alors l'équation en λ aura bien encore une racine double. D'où la condition

$$M^4 - M^2(N^2 - M^2) + a^2b^2 = 0$$

ou

$$M^2[M^2 - (N^2 - M^2)] + a^2b^2 = 0,$$

et l'équation correspondante est

$$(a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega)[a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega - (a^2 + b^2) + \rho^2] + a^2b^2 = 0$$

ou

$$(a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega)(\rho^2 - a^2\cos^2\omega - b^2\sin^2\omega) + a^2b^2 = 0,$$

$$\rho^2 = \frac{c^4\sin^2\omega \, . \cos^2\omega}{a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega}.$$

Cette dernière représente une courbe S facile à construire.

A priori on voit bien que les quatre points où les deux circonférences C, C′ rencontrent les axes de l'ellipse appartiennent au lieu cherché (*); de même, on voit que le centre de l'ellipse est un point multiple qui correspond aux cercles concentriques à l'ellipse et tangents à cette courbe en ses sommets. Il resterait à voir si la courbe trouvée S fait bien réellement partie du lieu des centres, ou si elle est due à un fait purement algébrique (**).

(*) Un point quelconque

$$x = (a + b)\cos\omega, \quad y = (a + b)\sin\omega$$

de la circonférence C est le centre d'un cercle qui touche l'ellipse au point

$$x = a\cos\omega, \quad y = b\sin\omega$$

et dont le rayon est $\sqrt{a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega}$ ou M. Le même cercle a, en commun avec l'ellipse, deux tangentes parallèles; son centre appartient donc au lieu cherché.

De même, en prenant pour centre un point quelconque

$$x = (a - b)\cos\omega, \quad y = (a - b)\sin\omega$$

de la circonférence C′, et pour rayon $\sqrt{a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega}$, le cercle décrit touchera l'ellipse au point

$$x = a\cos\omega, \quad y = -b\sin\omega;$$

il aura de plus, avec l'ellipse, deux tangentes parallèles. Ainsi le centre de ce cercle est un point du lieu.

(**) La courbe S, représentée par l'équation

$$\rho^2 = \frac{c^4\sin^2\omega\cos^2\omega}{a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega},$$

est le lieu géométrique des projections du centre de l'ellipse sur les normales à l'ellipse; par conséquent, la courbe S fait partie du lieu cherché.

G.