Nouvelles annales de mathématiques

V.-A. Le Besgue

Note sur le lieu des foyers des sections centrales des surfaces du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 444-449

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__444_0>

NOTE SUR LE LIEU DES FOYERS DES SECTIONS CENTRALES DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ;

Par M. V.-A. LE BESGUE.

Pour simplifier le calcul, on suppose que les axes des coordonnées sont aussi les axes principaux de la surface qui a pour équation

$$(1)\qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1;$$

on représente par

$$(2)\qquad mx + ny + pz = 0$$

le plan de la section, et par

$$(3)\qquad x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

le carré d'un demi-diamètre de la section. En exprimant que r prend sa valeur maximum ou minimum au moyen des équations

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0,$$
$$m\,dx + n\,dy + p\,dz = 0,$$
$$Ax\,dx + By\,dy + Cz\,dz = 0,$$

on a, en éliminant les dérivées $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, l'équation

$$m(B - C)yz + n(C - A)zx + p(A - B)xy = 0,$$

ou bien

$$(4)\qquad m\alpha yz + n\beta zx + p\gamma xy = 0,$$

en posant, pour abréger :

$$B - C = \alpha,\quad C - A = \beta,\quad A - B = \gamma.$$

Ces équations donnent immédiatement

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = -2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha),$$
$$\alpha A + \beta B + \gamma C = 0,$$
$$\alpha^2 A^2 + \beta^2 B^2 + \gamma^2 C^2 = -2(\alpha\beta AB + \beta\gamma BC + \gamma\alpha CA),$$

résultats qui serviront bientôt.

Les équations (1), (2), (4) donneront x, y, z; puis (3) donnera r. Mais le calcul de r peut se faire plus directement comme il suit.

Les équations (2) et (4) donnent

$$(5) \qquad \frac{m}{x(\beta z^2 - \gamma y^2)} = \frac{n}{y(\gamma x^2 - \alpha z^2)} = \frac{p}{z(\alpha y^2 - \beta x^2)} = \lambda,$$

et, en mettant pour α, β, γ leurs valeurs, conduisent à

$$\lambda x = \frac{m}{1 - Ar^2}, \quad \lambda y = \frac{n}{1 - Br^2}, \quad \lambda z = \frac{p}{1 - Cr^2}.$$

Mais on a

$$\lambda^2 r^2 = \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 + \lambda^2 z^2,$$
$$\lambda^2 r^2 = Ar^2 \lambda^2 x^2 + Br^2 \lambda^2 y^2 + Cr^2 \lambda^2 z^2,$$

d'où l'on tire par la soustraction

$$(1 - Ar^2)\lambda^2 x^2 + (1 - Br^2)\lambda^2 y^2 + (1 - Cr^2)\lambda^2 z^2 = 0;$$

puis, mettant pour λx, λy, λz leurs valeurs, il en résulte

$$\frac{m^2}{1 - Ar^2} + \frac{n^2}{1 - Br^2} + \frac{p^2}{1 - Cr^2} = 0,$$

et par conséquent l'équation

$$\begin{aligned}(BCm^2 + CAn^2 + ABp^2)r^4 \\ - [(B + C)m^2 + (C + A)n^2 + (A + B)p^2]r^2 \\ + (m^2 + n^2 + p^2) = 0,\end{aligned}$$

ou, pour abréger,

$$(6) \qquad \mathrm{L}r^4 - \mathrm{M}r^2 + \mathrm{N} = 0.$$

Les deux valeurs de r^2 étant

$$\frac{\mathrm{M} \pm \sqrt{\mathrm{M}^2 - 4\mathrm{LN}}}{2\mathrm{L}},$$

la différence

$$\frac{\sqrt{\mathrm{M}^2 - 4\mathrm{LN}}}{\mathrm{L}} = \rho^2,$$

prise en valeur absolue, sera le carré de la distance du centre à un des foyers.

Le carré ρ^2 peut s'exprimer comme il suit en fonction des coordonnées du foyer. On remarquera que les équations (2), (4) étant homogènes, on peut y remplacer les quantités x, y, z par des quantités proportionnelles. Ainsi, aux coordonnées des sommets on peut substituer celles des foyers, et l'on aura, ces coordonnées étant x, y, z,

$$\frac{m}{x(\beta z^2 - \gamma y^2)} = \frac{n}{y(\gamma x^2 - \alpha z^2)} = \frac{p}{z(\alpha y^2 - \beta x^2)} = \mu,$$

ou bien encore

$$m = \mu x(\beta z^2 - \gamma y^2), \quad n = \mu y(\gamma x^2 - \alpha z^2),$$
$$p = \mu z(\alpha y^2 - \beta x^2),$$

ou, pour abréger,

$$m = \mu x\mathrm{X}, \quad n = \mu y\mathrm{Y}, \quad p = \mu z\mathrm{Z}.$$

Substituant dans la valeur de

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \frac{\sqrt{\mathrm{M}^2 - 4\mathrm{LN}}}{\mathrm{L}},$$

on aura d'abord

$$\frac{\mathrm{L}}{\mu^2} = \mathrm{BC}\,x^2\mathrm{X}^2 + \mathrm{CA}\,y^2\mathrm{Y}^2 + \mathrm{AB}\,z^2\mathrm{Z}^2,$$

et en remplaçant **X**, Y, **Z** par leurs valeurs, et simplifiant au moyen de l'équation

$$\alpha^2 A^2 + \beta^2 B^2 + \gamma^2 C^2 = -2(\alpha\beta AB + \beta\gamma BC + \gamma\alpha CA),$$

il viendra

$$\frac{L}{\mu^2} = (Ax^2 + By^2 + Cz^2)(A\alpha^2 y^2 z^2 + B\beta^2 z^2 x^2 + C\gamma^2 x^2 y^2).$$

Le calcul de $\frac{1}{\mu^2}\sqrt{M^2 - 4LN}$ est plus compliqué. On a d'abord, réduction faite,

$$\begin{aligned} M^2 - 4LN = \alpha^2 m^4 + \beta^2 n^4 + \gamma^2 p^4 - 2\beta\gamma n^2 p^2 \\ - 2\gamma\alpha p^2 m^2 - 2\alpha\beta m^2 n^2, \end{aligned}$$

puis, en remplaçant m, n, p par leurs valeurs, celle de $\frac{1}{\mu^2}\sqrt{M^2 - 4LN}$ devient

$$\sqrt{\alpha^2 x^4 X^4 + \beta^2 y^4 Y^4 + \gamma^2 z^4 Z^4 - 2\beta\gamma y^2 z^2 Y^2 Z^2 - 2\gamma\alpha z^2 x^2 Z^2 X^2 - 2\alpha\beta x^2 y^2 X^2 Y^2},$$

ou bien encore

$$\sqrt{(\beta z^2 - \gamma x^2)^2(\gamma x^2 - \alpha z^2)^2(\alpha y^2 - \beta x^2)^2} = \sqrt{X^2 Y^2 Z^2} = \pm XYZ.$$

Ce résultat, qui ne suppose pas la relation

$$\alpha + \beta + \gamma = 0,$$

s'établit comme il suit : on met la quantité radicale sous la forme

$$(\alpha^2 x^4 X^2 - 2\alpha\gamma x^2 z^2 Z^2 - 2\alpha\beta x^2 y^2 Y^2)X^2 + (\beta y^2 Y^2 - \gamma z^2 Z^2)^2,$$

et comme on a

$$\begin{aligned} &\beta y^2(\gamma x^2 - \alpha z^2)^2 - \gamma z^2(\alpha y^2 - \beta x^2)^2 \\ &= \beta y^2(\gamma^2 x^4 + \alpha^2 z^4) - \gamma z^2(\alpha^2 y^4 + \beta^2 x^4) \\ &= (\beta z^2 - \gamma y^2)(\alpha^2 y^2 z^2 - \beta\gamma x^4) \\ &= X(\alpha^2 y^2 z^2 - \beta\gamma x^4), \end{aligned}$$

la quantité sous le radical est donc divisible par X^2. On prouve de même qu'elle est divisible par Y^2 et par Z^2, d'où il suit que $X^2Y^2Z^2$ est diviseur de la quantité radicale. Comme cette quantité est du douzième degré en x, y, z aussi bien que le produit $X^2Y^2Z^2$, il suffit d'ordonner pour trouver le quotient.

Dans la quantité radicale, la plus haute puissance de x se trouve dans les termes

$$\beta^2 y^4 Y^4 + \gamma^2 z^4 Z^4 - 2\beta\gamma y^2 z^2 Y^2 Z^2,$$

ou

$$(\beta y^2 Y^2 - \gamma z^2 Z^2)^2 = [X(\alpha^2 y^2 z^2 - \beta\gamma x^4)]^2.$$

C'est donc $\beta^2\gamma^2 X^2 . x^8$ qui est le premier terme de la quantité radicale ordonnée par rapport à x.

Dans le produit $X^2 Y^2 Z^2$ ou $X^2(\gamma x^2 - \alpha z^2)^2(\alpha y^2 - \beta x^2)^2$, le terme en x^8 est aussi $\beta^2\gamma^2 X^2 . x^8$. Le quotient est donc l'unité.

On aura donc

$$(a)\left\{\begin{aligned} &(x^2+y^2+z^2)(Ax^2+By^2+Cz^2)(A\alpha^2 y^2 z^2 + B\beta^2 z^2 x^2 + C\gamma^2 x^2 y^2) \\ &\quad = \pm(\beta z^2 - \gamma y^2)(\gamma x^2 - \alpha z^2)(\alpha y^2 - \beta x^2).\end{aligned}\right.$$

Cette équation ne diffère de celle donnée par M. Painvin (*Nouvelles Annales*, p. 490, 1864) que par le double signe du second membre. Pour le voir, il suffit de remplacer A, B, C par $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$; alors α, β, γ deviennent $\frac{c^2-b^2}{b^2c^2}$, $\frac{a^2-c^2}{a^2c^2}$, $\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}$,

$$\beta z^2 - \gamma y^2 = \frac{1}{a^2}\left[(a^2-b^2)\frac{y^2}{b^2} + (a^2-c^2)\frac{z^2}{c^2}\right],$$

$$\gamma x^2 - \alpha z^2 = \frac{1}{b^2}\left[(b^2-c^2)\frac{z^2}{c^2} + (b^2-a^2)\frac{x^2}{a^2}\right],$$

$$\alpha y^2 - \beta x^2 = \frac{1}{c^2}\left[(c^2-a^2)\frac{x^2}{a^2} + (c^2-b^2)\frac{y^2}{b^2}\right];$$

puis

$$A\alpha^2 y^2 z^2 + B\beta^2 z^2 x^2 + C\gamma^2 x^2 y^2$$

devient

$$\frac{1}{a^2 b^2 c^2}\left[(c^2 - b^2)^2 \frac{y^2 z^2}{b^2 c^2} + (a^2 - e^2)^2 \frac{z^2 x^2}{c^2 a^2} + (b^2 - a^2)^2 \frac{x^2 y^2}{a^2 b^2}\right];$$

de sorte qu'en multipliant par $a^2 b^2 c^2$, et prenant le signe supérieur, on a précisément le résultat de M. Painvin.

Il reste à examiner s'il faut toujours prendre le signe supérieur.

Remarque. — Il résulte de ce qui précède que l'équation biquadratique à quatre inconnues

$$s^2 = a^2 t^4 + b^2 u^4 + c^2 v^4 - 2bcu^2 v^2 - 2act^2 v^2 - 2abt^2 u^2$$

devient une identité en posant

$$\begin{aligned} t &= x(bz^2 - cy^2), \\ u &= y(cx^2 - az^2), \\ v &= z(ay^2 - bx^2), \\ s &= (bz^2 - cy^2)(cx^2 - az^2)(ay^2 - bx^2). \end{aligned}$$

On prouve de même qu'on peut prendre

$$\begin{aligned} t &= x(by^2 - cz^2), \\ u &= y(cz^2 - ax^2), \\ v &= z(ax^2 - by^2), \\ s &= (by^2 - cz^2)(cz^2 - ax^2)(ax^2 - by^2). \end{aligned}$$

On trouve ainsi une infinité de solutions en nombres entiers quand a, b, c sont des entiers de signe quelconque.